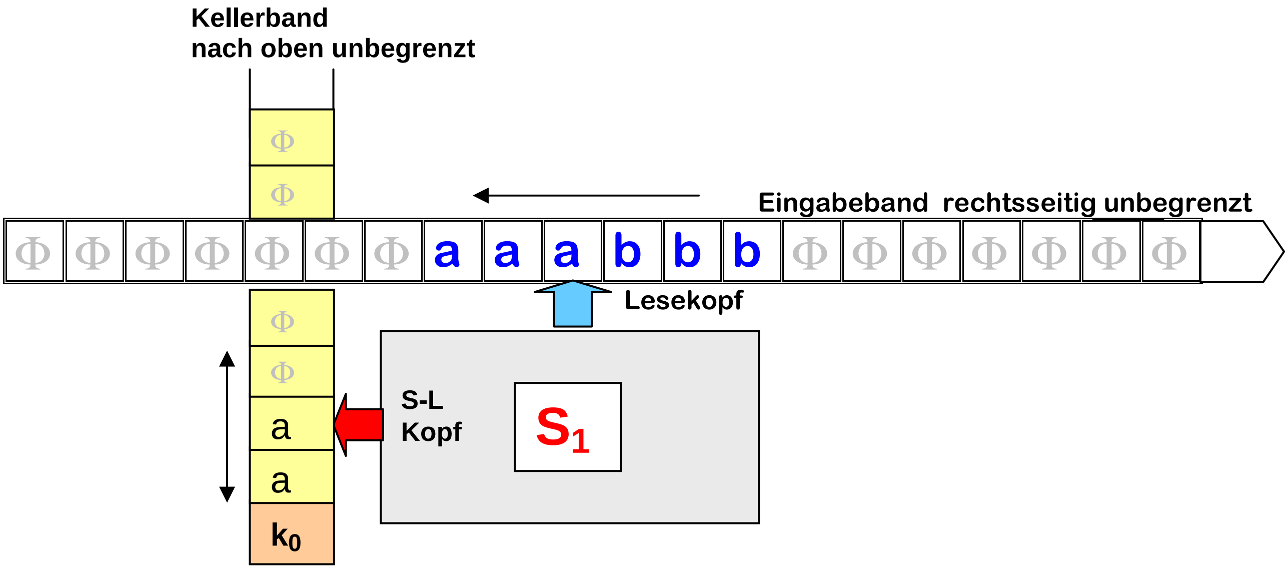
Der Kellerautomat

Dieser Automat hat zusätzlich ein unbegrenztes Kellerband (Stack), das als Speicher dient und mit speziellen Zeichen aus dem Kelleralphabet beschrieben werden kann:



$$KA = (\Sigma; K; S; F; s_0; k_0; \varphi)$$

Dabei ist

$\Sigma = \{e_1; e_2 \ldots\ldots\ldots\ldots e_n\}$	**D**as Eingabealphabet
$K = \{\Phi; k_0; k_1 \ldots\ldots k_m\}$	Das Kelleralphabet
$S = \{s_0; s_1 \ldots\ldots\ldots\ldots s_r\}$	Die Zustandsmenge
$F \subset S$	Die Menge der Endzustände
$s_0 \in S$	Der Startzustand
$k_0 \in K$	Das Kellerstartzeichen
$\varphi : (\tilde{e}_i; S_j; k_l) \to (S_t; \omega_x)$	Die Überführungsfunktion

Σ enthält die Eingabezeichen, die auf das Eingabeband geschrieben werden können. Das leere Zeichen Φ („Blank“) gehört nicht zu Σ. ($\Phi \notin \Sigma$)
K enthält die Zeichen, die auf das Kellerband geschrieben werden können.

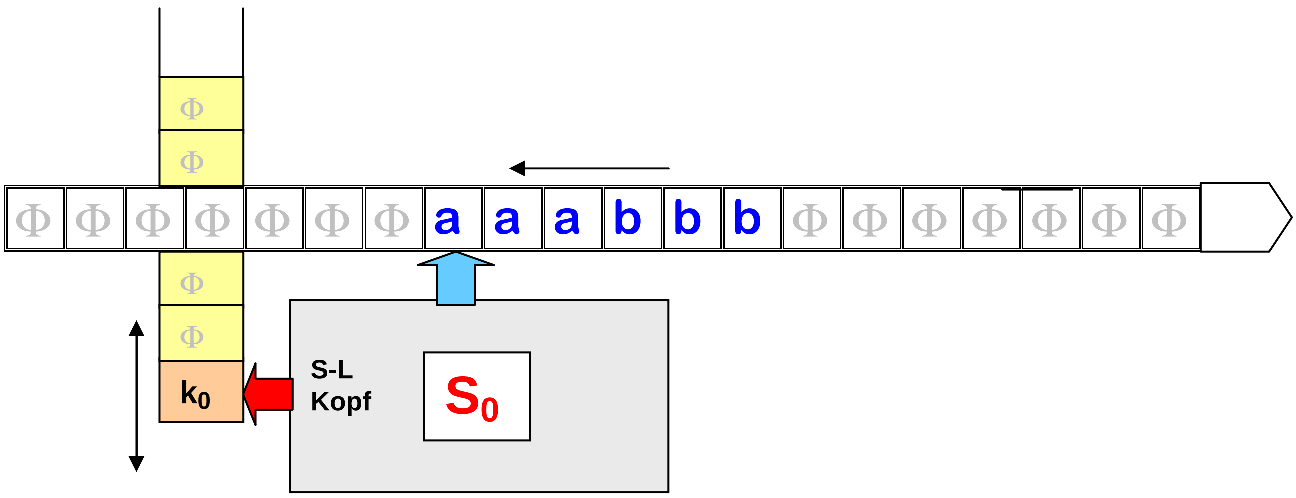
Das leere Zeichen Φ („Blank“) gehört zu K. Ein besonderes Zeichen in K ist das sogenannte Kellerstartzeichen k_0 ,das zu Anfang immer im untersten Kellerfeld steht.

S Die Zustandsmenge enthält den besonderen Startzustand s_0. Mindestens einer der restlichen Zustände ist ein Endzustand.

φ Die Überführungsfunktion bestimmt bei einem aktuell gelesenen Zeichen $\tilde{e}_i \in \Sigma \cup \{\Phi\}$,dem aktuellen Zustand S_j und dem aktuell gelesenen Kellerzeichen k_l den Folgezustand s_t und das Kellerwort (die Kellerzeichenfolge) ω_x ,welches auf das Kellerband geschrieben wird.

Initialisieren des Kellerautomaten

Zu Beginn der Arbeit nimmt der Kellerautomat den Startzustand s_0 ein und der Lesekopf steht über dem ersten (linken) Zeichen des Eingabewortes auf dem Eingabeband. Der Schreib-Lesekopf des Kellerbands steht auf dem untersten Kellerfeld und hat dort das Kellerstartzeichen k_0 eingetragen.



Die Arbeitsweise des Kellerautomaten:

Eingabewort eingeben

Den Kellerautomaten initialisieren

Wiederhole

Zeichen auf dem Eingabeband lesen
Kellerzeichen lesen

Ist für $(\tilde{e}_i;S_j;k_l)$ in φ ein Funktionswert definiert ?

ja

Gilt für $\varphi:(e_i;S_j;k_l)\to(S_t;\omega_x)$, dann nimmt der KA den Folgezustand S_t ein und schreibt die Kellerzeichenfolge ω_x zeichenweise auf das Kellerband. Das aktuelle Zeichen k_l wird dabei vom ersten Zeichen des Kellerworts überschrieben.
Der S-L-Kopf steht danach auf dem obersten Zeichen des Kellerbands, d.h. über dem letzten Zeichen der geschriebenen Kellerzeichenfolge

Das Eingabeband bewegt sich danach um ein Zeichen nach links.

Ist das gelesene Zeichen das Blank Φ , dann bewegt sich das Eingabeband nicht weiter.
Ist $\omega_x=\Phi$, dann wird das aktuelle Kellerzeichen k_l durch das Φ ersetzt („gelöscht“) und das Kellerband wird um eine Position nach oben geschoben, falls das unterste Kellerfeld noch nicht erreicht ist.

Ist das Kellerband leer oder der erreichte Zustand ein Endzustand, dann stoppt der KA.

nein

Der KA stoppt

solange bis der Kellerautomat stoppt

Bemerkung:

Ein Eingabewort wird akzeptiert, wenn der KA am Ende in einem Endzustand ist, und das Kellerband leer ist, wenn der Kellerautomat aufgehört hat zu arbeiten.

Beispiel 1

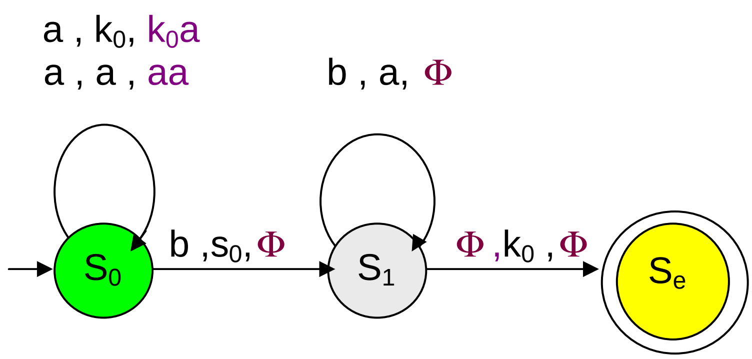
Ein Kellerautomat, der die Sprache $L=\{w \,/\, w = a^n b^n\}$ über $\Sigma = \{a,b\}$ akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind ab , aabb , aaabbb , aaaabbbb , u.s.w.

$$KA_1 = (\Sigma; K; S; F; s_0; k_0; \varphi_1)$$

$\Sigma = \{a,b\}$ $K = \{\Phi, k_0, a\}$ $S = \{s_0, s_1, s_e\}$ F={ S_e } $s_0 \in S$ $k_0 \in K$

φ_1 :



Die Instruktion e , k , ω bedeutet : gelesenes Eingabezeichen e , gelesenes Kellerzeichen k und rückgeschriebene Kellerzeichenfolge ω. Der Folgezustand ist jeweils an der Spitze der Pfeile.

$$\xrightarrow{\text{read, read, write}}$$

Ablauf für das Eingabewort w = aaabbb

Eingabeband								Zustand	Kellerband						
Φ	a	a	a	b	b	b	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	Φ	s_0	k_0	a	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	Φ	s_0	k_0	a	a	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	Φ	s_0	k_0	a	a	a	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	Φ	s_1	k_0	a	a	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	Φ	s_1	k_0	a	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	Φ	s_1	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	Φ	s_e	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ

Die Arbeit dieses Kellerautomaten ist leicht zu verstehen:
Für jedes gelesene a wird ein a „abgekellert“. Liest der Automat dann die b´s, so wird für jedes gelesene b ein a gelöscht. Ist am Schluss das Kellerband leer und der Kellerautomat in einem Endzustand, dann ist das Wort akzeptiert.

Ablauf für das Eingabewort w = aaabbbb

Eingabeband									Zustand	Kellerband						
Φ	a	a	a	b	b	b	b	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	b	Φ	s_0	k_0	a	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	b	Φ	s_0	k_0	a	a	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	b	Φ	s_0	k_0	a	a	a	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	b	Φ	s_1	k_0	a	a	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	b	Φ	s_1	k_0	a	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	b	Φ	s_1	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	b	b	Φ	STOP	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ

Ablauf für das Eingabewort w = aaabb

Eingabeband								Zustand	Kellerband						
Φ	a	a	a	b	b	Φ	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	Φ	Φ	s_0	k_0	a	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	Φ	Φ	s_0	k_0	a	a	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	Φ	Φ	s_0	k_0	a	a	a	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	Φ	Φ	s_1	k_0	a	a	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	Φ	Φ	s_1	k_0	a	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	a	a	b	b	Φ	Φ	STOP	k_0	a	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ

Beispiel 2
Ein Kellerautomat, der die Sprache L={w / w enthält gleich viele a und b}
über $\Sigma = \{a,b\}$ akzeptiert.

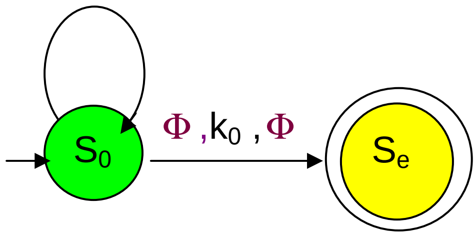
Worte w dieser Sprache sind z.B.: ab , ba, abab , abbbaa , aaaabbbb , u.s.w.

$$KA_2 = (\Sigma; K; S; F; s_0; k_0; \varphi_2)$$

$\Sigma = \{a,b\}$ $K = \{\Phi, k_0, a, b\}$ $S = \{s_0, s_e\}$ $F = \{ S_e \}$ $s_0 \in S$ $k_0 \in K$

φ_2 :

b , a , Φ
b, k_0, k_0b
b , b , bb
a , b , Φ
a , k_0, k_0a
a , a , aa



Ablauf für das Eingabewort w = abbbaa

Eingabeband								Zustand	Kellerband						
Φ	a	b	b	b	a	a	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	b	b	b	a	a	Φ	s_0	k_0	a	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	b	b	b	a	a	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	b	b	b	a	a	Φ	s_0	k_0	b	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	b	b	b	a	a	Φ	s_0	k_0	b	b	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	b	b	b	a	a	Φ	s_0	k_0	b	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	b	b	b	a	a	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	a	b	b	b	a	a	Φ	s_e	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ

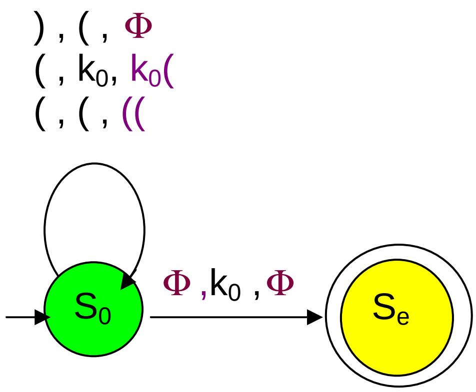
Beispiel 3
Ein Kellerautomat, der die Sprache L={w / w ist ein korrekter Klammerausdruck} über $\Sigma = \{ (,) \}$ akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind z.B.: ( ) , (( )), (( )( )) , (( ) (( )( ))) u.s.w.

$$KA_3 = (\Sigma; K; S; F; s_0; k_0; \varphi_3)$$

$\Sigma = \{(,)\}$ $K = \{ \Phi, k_0, (\}$ $S = \{s_0, s_1, s_e\}$ $F = \{ S_e \}$ $s_0 \in S$ $k_0 \in K$

φ_3 :



Ablauf für das Eingabewort w = (( )( ))

Eingabeband								Zustand	Kellerband						
Φ	(	(	)	(	)	)	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	(	(	)	(	)	)	Φ	s_0	k_0	(	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	(	(	)	(	)	)	Φ	s_0	k_0	(	(	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	(	(	)	(	)	)	Φ	s_0	k_0	(	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	(	(	)	(	)	)	Φ	s_0	k_0	(	(	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	(	(	)	(	)	)	Φ	s_0	k_0	(	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	(	(	)	(	)	)	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	(	(	)	(	)	)	Φ	s_e	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ

Beispiel 4
Ein Kellerautomat, der die Sprache

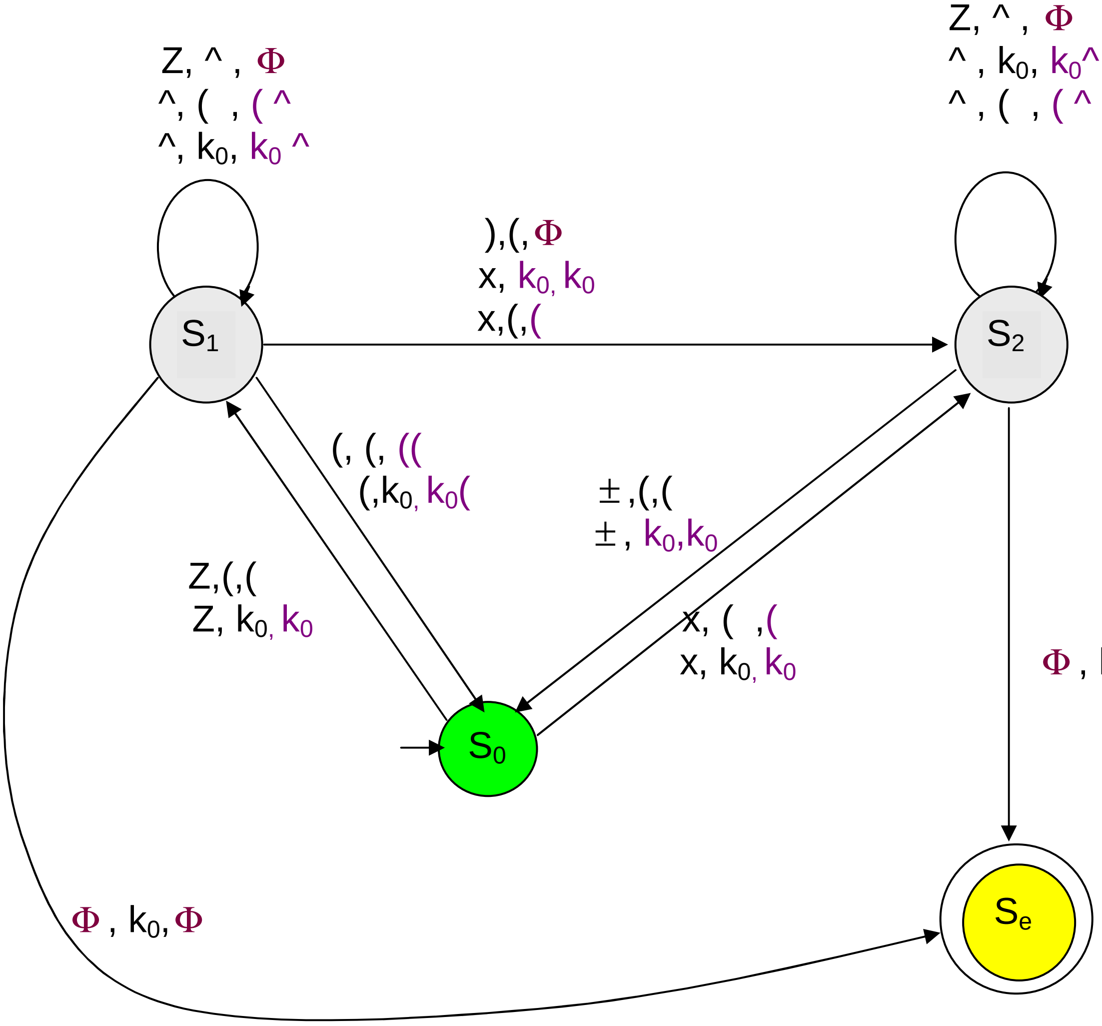
L={w / w ist ein korrekter Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion}
über $\Sigma = \{ x,\hat{},0...9,+,-,),(\}$ akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind z.B.: 3x^2-7x+2 ; 3(x-4)^3-7(x+2)^2+23 u.s.w.
Beachte: x ^n $\triangleq x^n$

$$KA_4 = (\Sigma; K; S; F; s_0; k_0; \varphi_4)$$

$\Sigma = \{ x,\hat{},0...9,+,-,),(\}$ $K = \{ \Phi, k_0, \hat{}, (\}$ $S = \{s_0, s_1, s_2, s_e\}$ $F = \{ S_e \}$ $s_0 \in S$ $k_0 \in K$

φ_4 : Φ , k_0 k_0



Beachte: Z $\triangleq$ 0,1,............,9

Ablauf für das Eingabewort w = 5(x-7)^4

Eingabeband										Zustand	Kellerband						
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_1	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_0	k_0	(	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_2	k_0	(	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_0	k_0	(	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_1	k_0	(	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_2	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_2	k_0	^	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_2	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	5	(	x	-	7	)	^	4	Φ	s_e	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ

Ablauf für das Eingabewort w = 3x^4+7x

Eingabeband										Zustand	Kellerband						
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_1	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_2	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_2	k_0	^	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_2	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_0	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_1	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_2	k_0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
Φ	3	x	^	4	-	7	x	Φ	Φ	s_e	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ

Grenze von Kellerautomaten:

Es gibt keinen Kellerautomaten, der die Sprachen

$$L = \{w \,/\, w = a^n b^n c^n\} \quad \text{über } \Sigma = \{a, b, c\}$$

$$L = \{w \,/\, w = a^n b^n c^n d^n\} \quad \text{über } \Sigma = \{a, b, c, d\}$$

u.s.w. akzeptiert.
Das ist anschaulich klar, denn für jedes

Dazu müsste man dem Kellerautomaten weitere Kellerbänder spendieren.
Man hätte dann Multi-Kellerbandautomaten. Diese lassen sich jedoch alle durch die viel einfacher aufgebaute TURING-Maschine ersetzen.