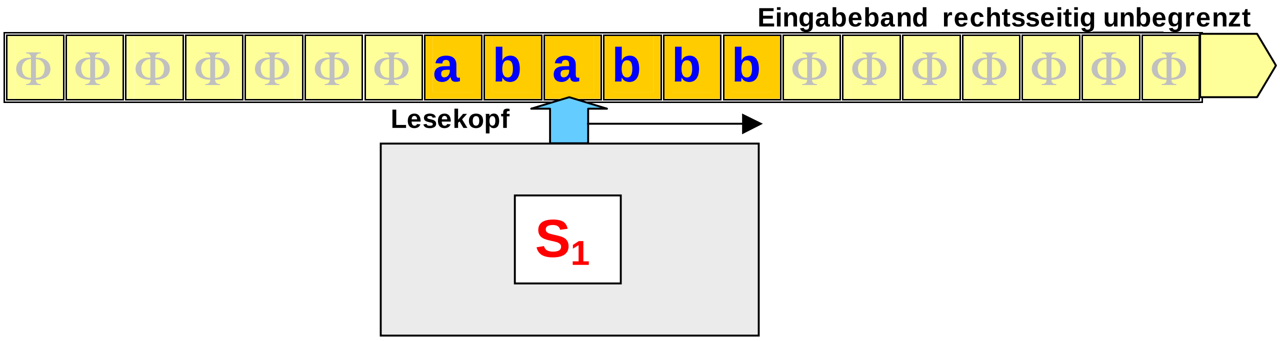
Der endliche Automat

Modell:



Definition: Ein endlicher Automat ist ein 5-Tupel

$$A = (\Sigma; S; F; s_0; \varphi)$$

Dabei ist $\Sigma = \{e_1; e_2 \ldots\ldots\ldots\ldots e_n\}$ **D**as endliche Eingabealphabet

$S = \{s_0; s_1 \ldots\ldots\ldots\ldots s_r\}$ Die endliche Zustandsmenge

$F \subset S$ Die Menge der Endzustände

$s_0 \in S$ Der Startzustand

$\varphi : (\tilde{e}_i; S_j) \rightarrow S_t$ Die Überführungsfunktion

Σ enthält die Eingabezeichen, die auf das Eingabeband geschrieben werden können. Das leere Zeichen Φ („Blank“) gehört nicht zu Σ. ($\Phi \notin \Sigma$)

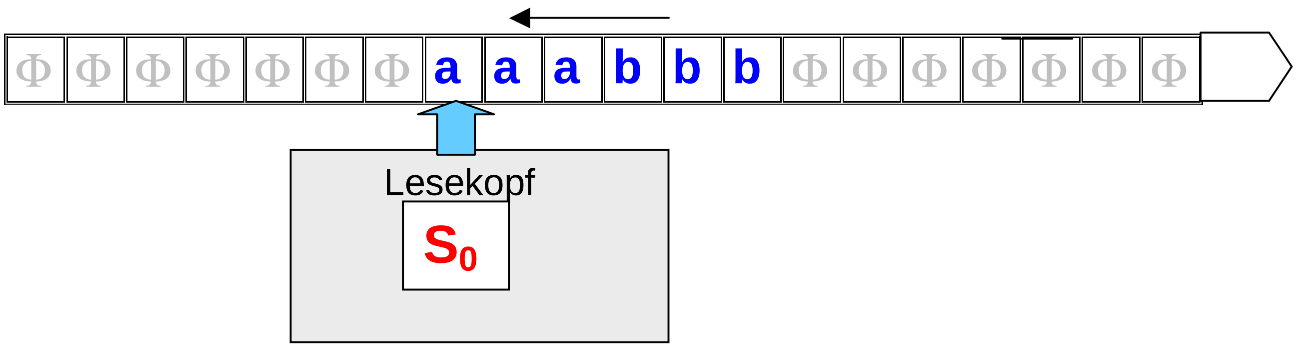
S Die Zustandsmenge enthält den besonderen Startzustand s_0. Mindestens einer der restlichen Zustände ist ein Endzustand.

φ Die Überführungsfunktion bestimmt bei einem aktuell gelesenen Zeichen $\tilde{e}_i \in \Sigma \cup \{\Phi\}$ und dem aktuellen Zustand S_j den Folgezustand s_t in den der Automat überführt wird.

Nach jedem Lesevorgang rückt der Lesekopf eine Position nach rechts.
Wenn ein Blank gelesen wird, hält der Automat an.

Initialisieren des endlichen Automaten : (→ Reset)

Zu Beginn der Arbeit nimmt der Automat den Startzustand s_0 ein und der Lesekopf steht über dem ersten (linken) Zeichen des Eingabewortes auf dem Eingabeband. Außer dem Eingabewort stehen nur leere Zeichen „BLANKS“ auf dem Band.



Die Arbeitsweise des endlichen Automaten:

Eingabewort eingeben	
Der Automat wird initialisiert	
Das erste Eingabezeichen lesen Ist dieses Zeichen das BLANK, dann stoppt der Automat.	
Solange noch Eingabezeichen auf dem Band vorhanden sind tue	
	den durch $\varphi : (e_i; S_j) \rightarrow S_t$ definierten Folgezustand einnehmen
	den Lesekopf um eine Position nach rechts bewegen
	das nächste Zeichen auf dem Band lesen

Bemerkung:

Ein Eingabewort wird akzeptiert, wenn der Automat nach der Abarbeitung des Worts in einem Endzustand ist.

Die Menge aller Eingabeworte, die von dem Automaten akzeptiert werden, bildet die Sprache L(A) des Automaten A.

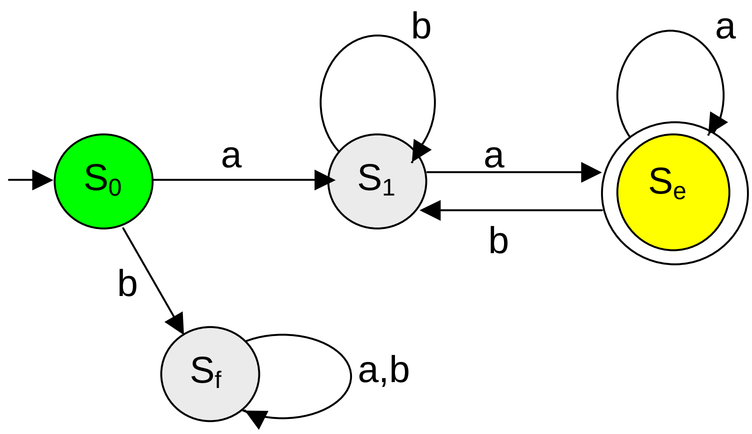
Beispiel für einen Automaten, der die Sprache
$L(A)=\{w\,/\,w = \text{beginnt und endet mit a und hat mindestens 2 Zeichen}\}$
über $\Sigma = \{a,b\}$ akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind aa , aba , ababba , aaaabbba , u.s.w.

$$A_1 = (\Sigma; S; F; s_0; \varphi_1)$$

$\Sigma = \{a,b\}$ $S = \{s_0, s_1, s_e, s_f\}$ $F=\{S_e\}$ $s_0 \in S$

φ_1:



Der Folgezustand ist jeweils an der Spitze der Pfeile. Auf dem Pfeil steht jeweils das aktuell gelesene Zeichen

$$\xrightarrow{\text{read}}$$

Der Zustand S_f ist ein Fehlerzustand aus dem heraus nie mehr ein Endzustand erreicht werden kann.

Die Überführungsfunktion φ lässt sich alternativ durch eine Folge von Automateninstruktionen beschreiben. Das sind 3-Tupel der Form

e_i	S_k	S_m

aktuell gelesenes Zeichen — aktueller Zustand — Folgezustand

φ :

a	S_0	S_1
b	S_0	S_f
a	S_1	S_e
b	S_1	S_1
a	S_e	S_e

a	S_e	S_e
b	S_e	S_1
a	S_f	S_f
a	S_f	S_f

Ablaufprotokoll des Automaten A_1 für das Eingabewort w_1=aababa :
(Kopfposition ist gelb unterlegt)

Eingabeband										Zustand
Φ	Φ	a	a	b	a	b	a	Φ	Φ	S_0
Φ	Φ	a	a	b	a	b	a	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	a	b	a	b	a	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	a	a	b	a	b	a	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	a	b	a	b	a	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	a	a	b	a	b	a	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	a	b	a	b	a	Φ	Φ	S_e

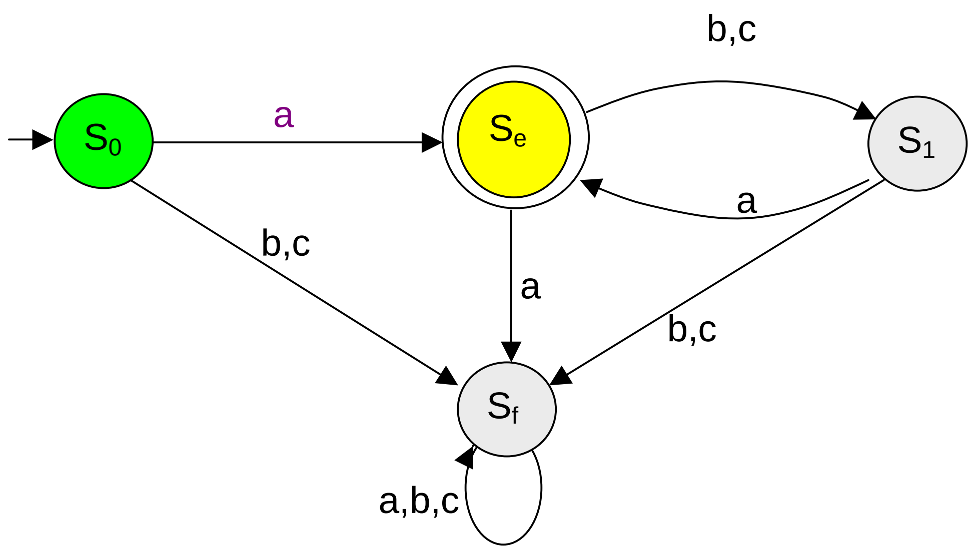
Beispiel für einen endlichen Automaten A_2 , der die Sprache
$L(A_2)=\{w\,/\,w$ ist so aufgebaut, dass nur genau das 1.,3.,5.,...Zeichen ein a ist$\}$
über $\Sigma = \{a,b,c\}$ akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind z.B. a , aba , aca , ababa , abaca , acaba
acabacac u.s.w.

$$A_2 = (\Sigma; S; F; s_0; \varphi_2)$$

$\Sigma = \{a,b,c\}$ $S = \{s_0, s_1, s_f, s_e\}$ $F=\{S_e\}$ $s_0 \in S$

φ_2 :



Ablaufprotokoll des Automaten A_2 für das Eingabewort w_1=acaba :
(Kopfposition ist gelb unterlegt)

Eingabeband										Zustand
Φ	Φ	a	c	a	b	a	Φ	Φ	Φ	S_0
Φ	Φ	a	c	a	b	a	Φ	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	a	c	a	b	a	Φ	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	c	a	b	a	Φ	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	a	c	a	b	a	Φ	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	c	a	b	a	Φ	Φ	Φ	S_e

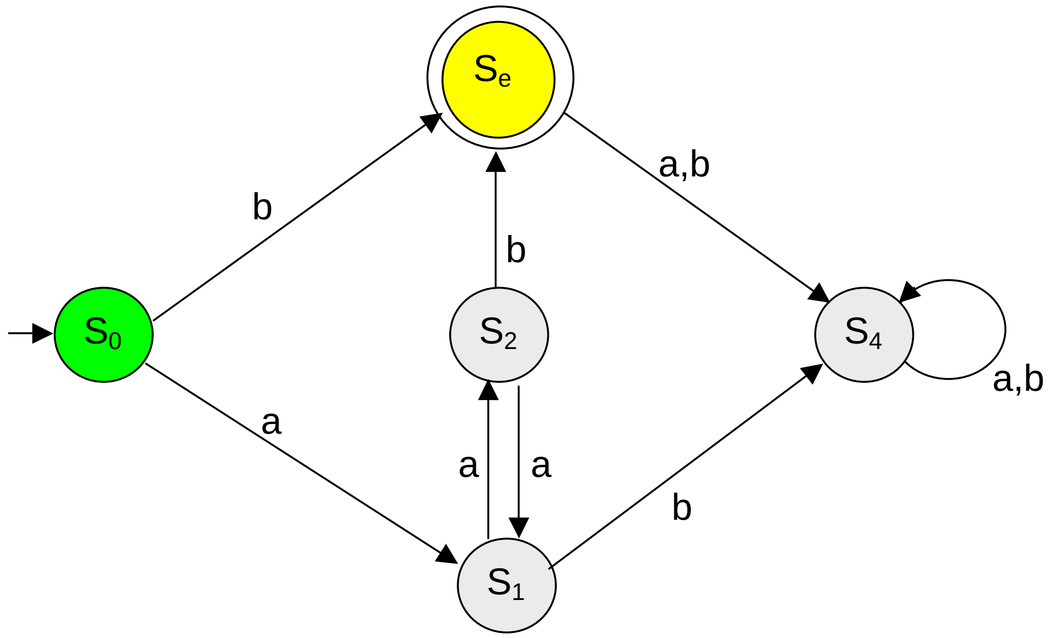
Beispiel für einen endlichen Automaten A_3 , der die Sprache $L(A_3)=\{w\,/\,w=a^{2n}b;\ n\in\mathbb{N}_0\}$ über $\Sigma=\{a,b\}$ akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind z.B. b , aab , aaaab ,aaaaaab .....

$$A_3=(\Sigma;S;F;s_0;\varphi_3)$$

$\Sigma=\{a,b\}$ $S=\{s_0,s_1,s_f,s_e\}$ F={ S_e } $s_0\in S$

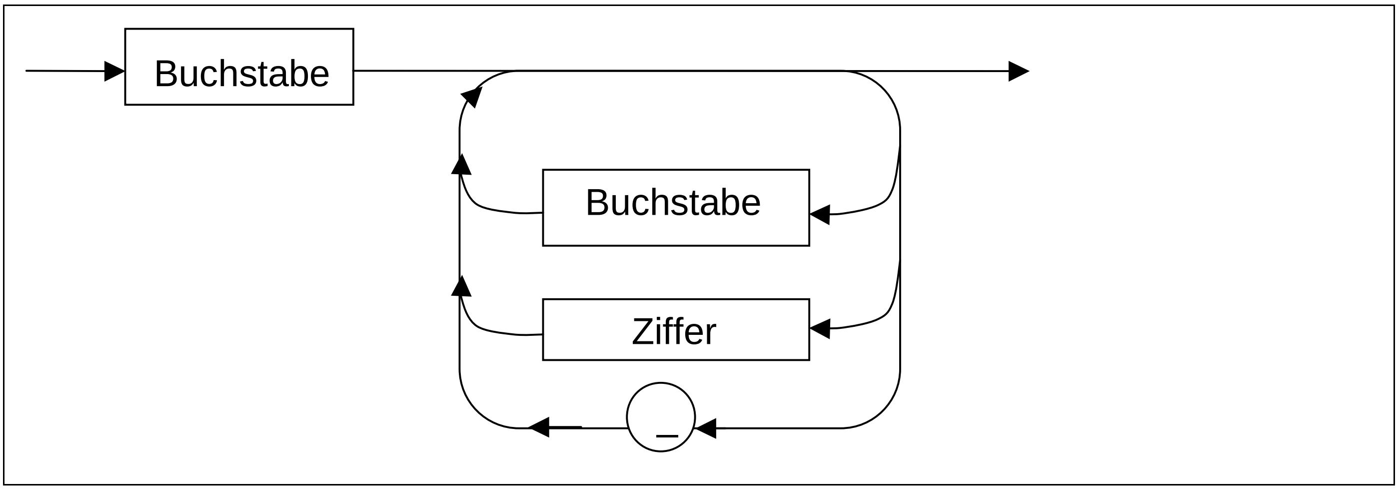
φ_3 :



Ablaufprotokoll des Automaten A_3 für das Eingabewort w_1=aaaab :
(Kopfposition ist gelb unterlegt)

Eingabeband										Zustand
Φ	Φ	a	a	a	a	b	Φ	Φ	Φ	S_0
Φ	Φ	a	a	a	a	b	Φ	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	a	a	a	b	Φ	Φ	Φ	S_2
Φ	Φ	a	a	a	a	b	Φ	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	a	a	a	b	Φ	Φ	Φ	S_2
Φ	Φ	a	a	a	a	b	Φ	Φ	Φ	S_e

In der Programmiersprache JAVA müssen Bezeichner nach dem folgenden Syntaxdiagramm gebildet werden:



Beispiel für einen endlichen Automaten A_4 , der korrekte JAVA-Bezeichner akzeptiert. $L(A_4)=\{w\,/\,w \text{ ist ein korrekter Java} - \text{Bezeichner}\}$

über $\Sigma = \{a...z;A...Z;0...9,\_,\text{sonstige Zeichen}\}$

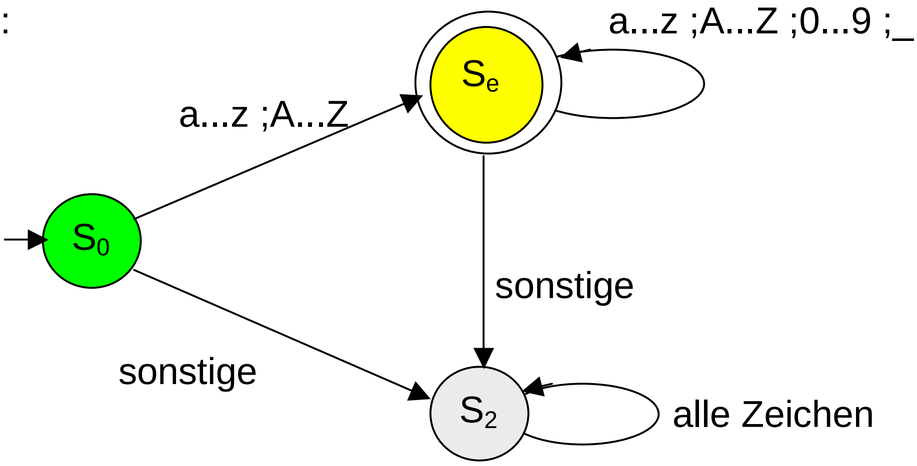
akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind z.B. erste_Zahl; Zahl1; Zahl_1; A123 ; xyz_1

$$A_4 = (\Sigma;S;F;s_0;\varphi_4)$$

Σ: siehe oben $S = \{s_0, s_1, s_f, s_e\}$ F={ S_e } $s_0 \in S$

φ_4 :



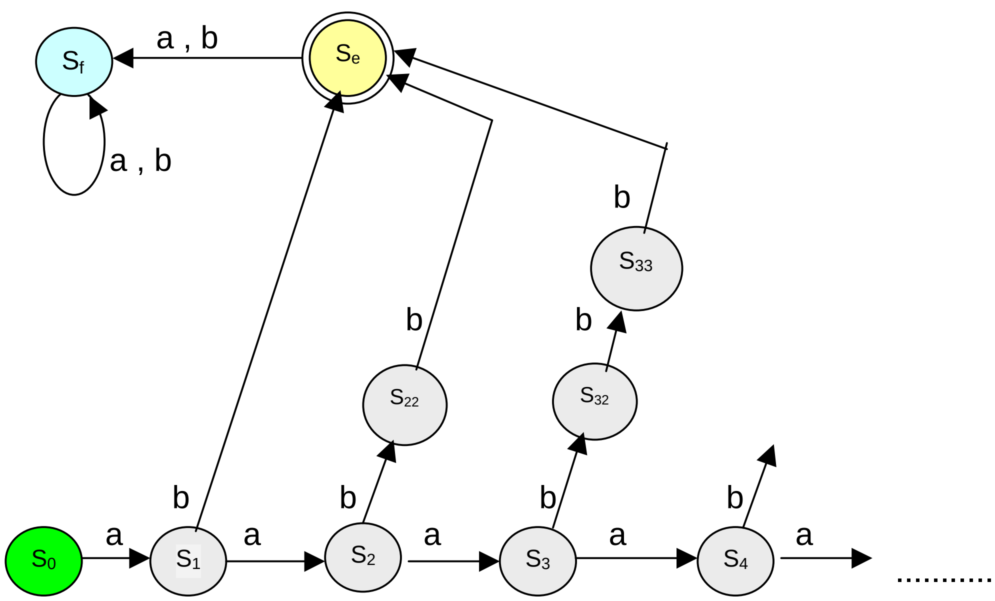
Ablaufprotokoll des Automaten A_4 für das Eingabewort w=zahl_1 :
(Kopfposition ist gelb unterlegt)

Eingabeband										Zustand
Φ	Φ	z	a	h	l	_	1	Φ	Φ	S_0
Φ	Φ	z	a	h	l	_	1	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	z	a	h	l	_	1	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	z	a	h	l	_	1	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	z	a	h	l	_	1	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	z	a	h	l	_	1	Φ	Φ	S_e
Φ	Φ	z	a	h	l	_	1	Φ	Φ	S_e

Die Grenzen der Spracherkennung bei endlichen Automaten

Da ein endlicher Automat nur endlich viele innere Zustände $s_0;s_1............s_{n-1}$ besitzt, hat er auch nur ein endliches Gedächtnis, d.h. er kann nur endlich viele Eingaben speichern, indem er jeweils in einen neuen Zustand wechselt.

Beispielsweise kann ein kein endlicher Automat die Sprache
$L=\{w / w = a^n b^n; n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a,b\}$ akzeptieren.
Wörter dieser Sprache sind z.B. ab ; aabb; aaabbb; aaaabbbb; u.s.w.
Der Versuch einen Automaten zu konstruieren zeigt sofort das Problem:



Das Speichern der Anzahl der gelesenen a kann nur über den Wechsel in einen neuen noch nicht eingenommenen Zustand erfolgen. Hat der Automat n verschiedene innere Zustände und soll das Wort $w = a^m b^m$ mit $m > n$ akzeptiert werden, dann kommt der Automat spätestens nach dem (m+1)ten a in einen Zustand S_k , in dem er schon einmal war, als gerade k mal a gelesen worden war. Der Automat kann nicht mehr unterscheiden, ob k mal a oder m+1 mal a gelesen worden ist. Dieses Wort ist damit nicht entscheidbar!

> Merke: Der endliche Automat hat auch nur eine endliche Speicherfähigkeit, die über die inneren Zustände geregelt wird.

Will man die Leistungsfähigkeit der Endlichen Automaten im Hinblick auf ihre Speicherfähigkeit erweitern, so gelangt man zum Modell des sogenannten Kellerautomaten.