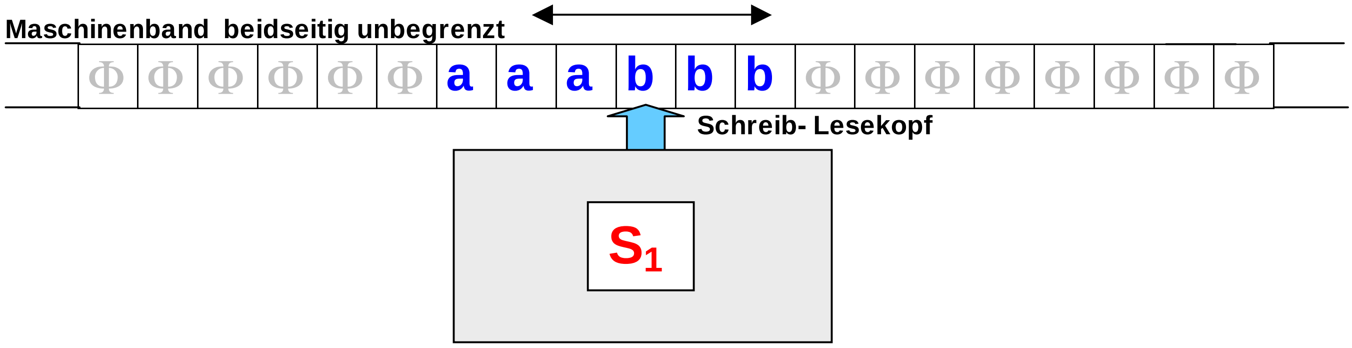
Die Turingmaschine (Alan M. Turing 1936)



$$T = (\Sigma; S; B; F; s_0; \varphi)$$

Dabei ist

	$\Sigma = \{e_1; e_2 \ldots\ldots\ldots\ldots e_n\}$	Das Maschinenalphabet
	$S = \{s_0; s_1 \ldots\ldots\ldots\ldots s_m\}$	Die Zustandsmenge
	$B = \{R, L, H\}$	Die Menge der Kopfbewegungen
	$F \subset S$	Die Menge der Endzustände
	$s_0 \in S$	Der Startzustand
	$\varphi : (e_i; S_j) \to (e_k; S_r; b_s)$	Die Überführungsfunktion

Σ enthält die Eingabezeichen und die Zeichen, die die Maschine auf das Band schreiben kann. Das leere Zeichen Φ („Blank“) gehört zu Σ ist aber kein Eingabezeichen d.h. die Turingmaschine kann Blanks auf das Band schreiben und damit Zeichen löschen.

S Die Zustandsmenge enthält den besonderen Startzustand s_0. Mindestens einer der restlichen Zustände ist ein Endzustand.

φ Die Überführungsfunktion bestimmt bei einem aktuell gelesenen Zeichen $e_i \in \Sigma$ und dem aktuellen Zustand S_j das zurückgeschriebene Zeichen e_k, den Folgezustand S_m und die anschließende Kopfbewegung des Schreib-Lesekopfs.

B Die möglichen Kopfbewegungen sind: Eine Position nach Rechts R, eine Position nach Links L und keine Bewegung (Halt) H .

Zu Beginn der Arbeit nimmt die Turingmaschine den Startzustand s_0 ein und der Schreib-Lesekopf steht über dem am weitesten rechts stehenden Zeichen des Eingabewortes. (Standardlage)

Die Arbeitsweise der Turingmaschine:

<table>
<tr><td colspan="2">Das Band ist mit lauter BLANKS (alternativ mit Nullen) gefüllt</td></tr>
<tr><td colspan="2">Startzustand s_0 einnehmen;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eingabewort eingeben</td></tr>
<tr><td colspan="2">S-L-Kopf in die Standardlage</td></tr>
<tr><td>Wiederhole</td><td>Eingabezeichen lesen
Zeichen über dem SL-Kopf gemäß φ neu beschreiben
Folgezustand gemäß φ einnehmen
Kopfbewegung gemäß φ ausführen</td></tr>
<tr><td colspan="2">solange bis ein Endzustand erreicht ist oder die TM stoppt</td></tr>
</table>

Die Turingmaschine stoppt, wenn es für ein aktuell gelesenes Zeichen und für einen aktuellen Zustand keine Instruktion in φ gibt.

Bemerkungen:

Normalerweise ist $\Sigma = \{e_1; e_2 \ldots\ldots\ldots\ldots e_n\}$. Da sich aber jedes Zeichen dieses Alphabets eindeutig mit einer Folge von 1en kodieren lässt, (e_1=1 ; e_2=11 ; e_3=111 ;........ .... $e_n = \underbrace{111....11}_{n}$) genügt es, sich auf $\Sigma = \{0;1;\Phi\}$ zu beschränken. Die Null ist dann das Trennzeichen zwischen den Eingabezeichen und Φ das Blank.

Auf das Blank kann ebenfalls verzichtet werden, wenn man vereinbart, dass der Beginn und das Ende eines Eingabeworts am Auftreten von zwei aufeinanderfolgenden Nullen erkannt wird.. Innerhalb eine Wortes kann immer nur eine einzelne 0 vorkommen:

Gültige Bandbeschriftung:

0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	

Ungültige Bandbeschriftung:

0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0

Die Turingmaschine als Akzeptor zur Spracherkennung

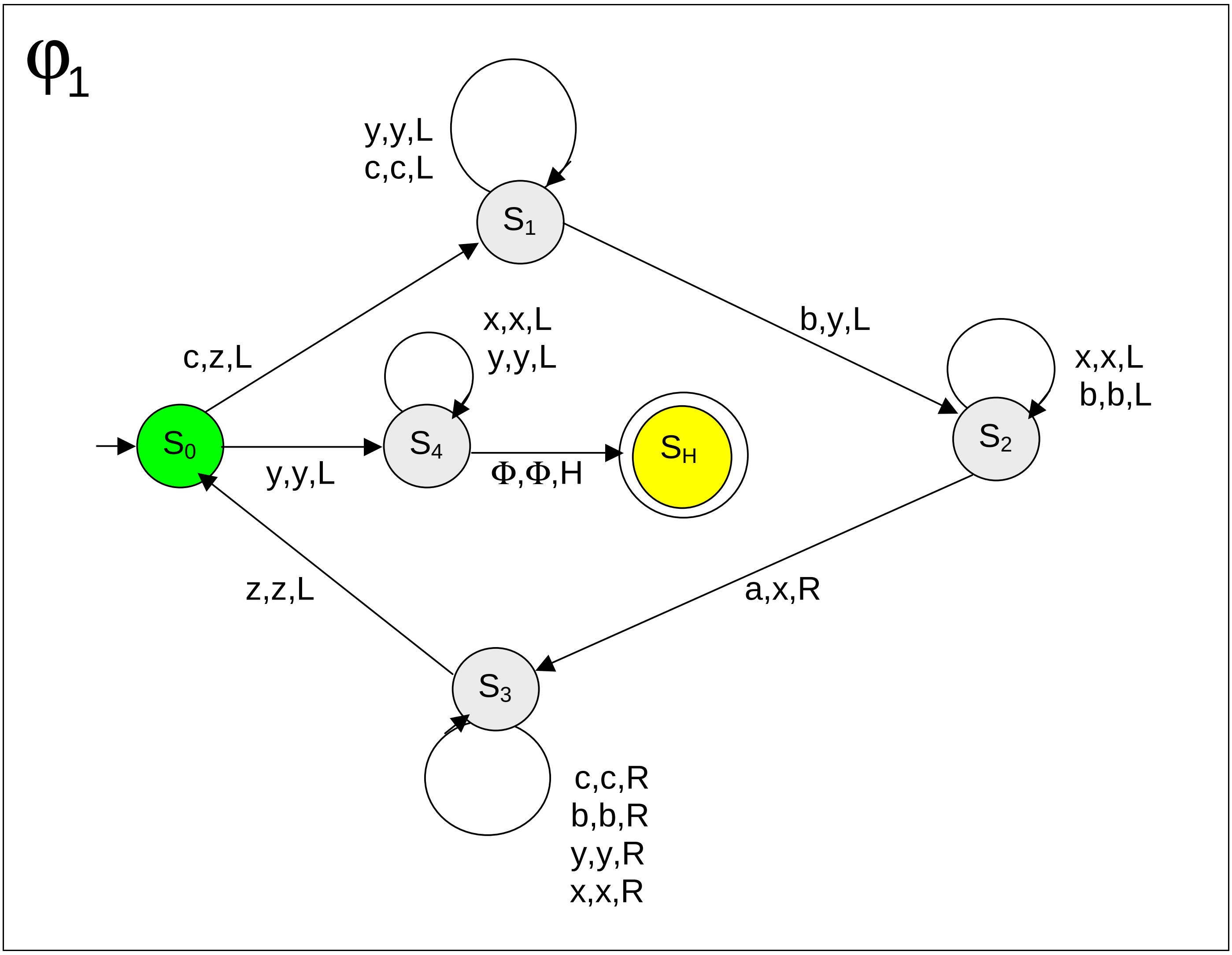
Beispiel für die Turingmaschine (hier sagt man besser Turingautomat), die die Sprache $L=\{w\,/\,w=a^n b^n c^n$ über $\Sigma=\{a,b,c,\Phi\}\}$ akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind abc , aabbcc , aaabbbccc , aaaabbbbcccc ,.....

$T_1=(\Sigma;S;B;F;s_0;\varphi)$

$\Sigma=\{a,b,c,\Phi\}$ $S=\{s_0,s_1,s_2,s_3,s_4,s_H\}$ $B=\{R,L,H\}$ $F=\{S_H\}$ $s_0\in S$

$\varphi:(e_i;S_j)\rightarrow(e_k;S_r;b_s)$



Die Instruktion c,z,L bedeutet : gelesenes Zeichen c ; rückgeschriebenes Zeichen z ; Kopfbewegung L d.h. eine Position nach links. Der Folgezustand ist jeweils an der Spitze der Pfeile.

read, write, move $\longrightarrow$

Die Überführungsfunktion φ lässt sich alternativ durch eine Folge von Turing-instruktionen beschreiben. Das sind 5-Tupel der Form

S_k	e_i	S_r	e_m	k

aktueller Zustand — aktuell gelesenes Zeichen — Folge-zustand — rückgeschrie-benes Zeichen — Kopf - bewegung

φ_1:

S_0	c	S_0	z	L
S_0	y	S_0	y	L
S_1	b	S_1	y	L
S_1	c	S_1	c	L
S_1	y	S_1	y	L
S_2	a	S_3	x	R
S_2	b	S_2	b	L
S_2	x	S_2	x	L

S_3	b	S_3	b	R
S_3	c	S_3	c	R
S_3	x	S_3	x	R
S_3	y	S_3	y	R
S_3	z	S_0	z	L
S_4	x	S_4	x	L
S_4	y	S_4	y	L
S_4	Φ	S_H	Φ	H

Ablaufprotokoll des Turingautomaten T_1 für das Eingabewort w_1=aabbcc :
(Kopfposition ist gelb unterlegt)

Bandbeschriftung										Zustand
Φ	Φ	a	a	b	b	c	c	Φ	Φ	S_0
Φ	Φ	a	a	b	b	c	z	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	a	b	b	c	z	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	a	b	y	c	z	Φ	Φ	S_2
Φ	Φ	a	a	b	y	c	z	Φ	Φ	S_2
Φ	Φ	a	x	b	y	c	z	Φ	Φ	S_3
Φ	Φ	a	x	b	y	c	z	Φ	Φ	S_3
Φ	Φ	a	x	b	y	c	z	Φ	Φ	S_3
Φ	Φ	a	x	b	y	c	z	Φ	Φ	S_3
Φ	Φ	a	x	b	y	c	z	Φ	Φ	S_0
Φ	Φ	a	x	b	y	z	z	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	x	b	y	z	z	Φ	Φ	S_1
Φ	Φ	a	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_2
Φ	Φ	a	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_2
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_3
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_3
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_3
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_3
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_0
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_4
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_4
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_4
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_4
Φ	Φ	x	x	y	y	z	z	Φ	Φ	S_H

Die Turingmaschine als Akzeptor zur Spracherkennung

Beispiel 2

Turingautomat der die Sprache $L=\{w\,/\,w \text{ enthältgleich viele } a,b,c\}$ über $\Sigma=\{a,b,c,\Phi\}$ akzeptiert.

Worte w dieser Sprache sind abc , aabbcc , aaabbbccc , aaaabbbbcccc ,.....

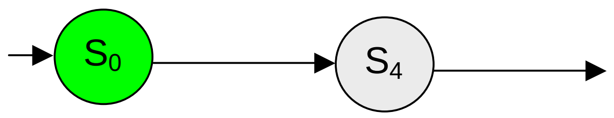
$T_2 = (\Sigma;S;B;F;s_0;\varphi)$

$\Sigma=\{a,b,c,\Phi\}$ $S=\{s_0,s_H\}$ $B = \{R,L,H\}$ $F=\{S_H\}$ $s_0 \in S$

$\varphi_2 : (e_i;S_j) \to (e_k;S_r;b_s)$

φ_2 :

noch in Arbeit !!!



Die Instruktion c,z,L bedeutet : gelesenes Zeichen c ; rückgeschriebenes Zeichen z ; Kopfbewegung L d.h. eine Position nach links. Der Folgezustand ist jeweils an der Spitze der Pfeile.

read, write, move

Die Kopiermaschine

Beispiel für die Turingmaschine, die eine Gruppe von Einsen auf dem Band kopiert.

Startbeschriftung:

0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Endbeschriftung:

0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Lösungsidee:
Da die Einsergruppe beliebig lang sein kann, muss sich das Programm merken, welche 1 es schon kopiert hat. Dazu wird die zu kopierende 1 durch 0 ersetzt, kopiert und danach wieder mit 1 überschrieben.

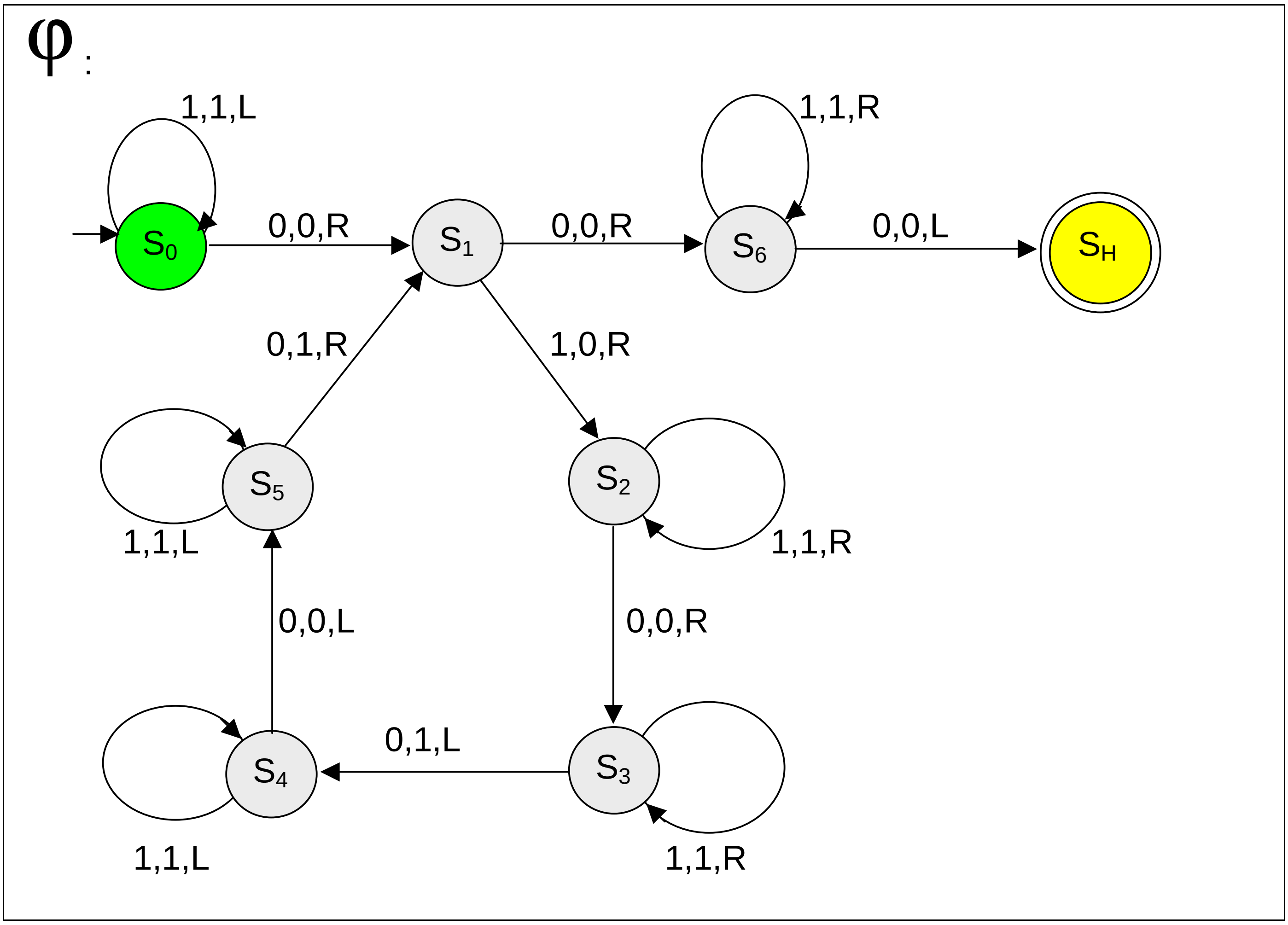
nach links laufen, bis eine 0 kommt	
eine Position nach rechts	
Zeichen lesen	
Solange das gelesene Zeichen eine 1 ist	
tue	1 durch 0 ersetzen
	nach rechts laufen bis eine 0 kommt
	nach rechts laufen bis eine 0 kommt
	0 mit 1 überschreiben
	nach links laufen, bis eine 0 kommt
	nach links laufen, bis eine 0 kommt
	0 mit 1 überschreiben
	eine Position nach rechts
	Zeichen lesen
nach rechts laufen bis eine 0 kommt	
eine Position nach links	
Halt	

Die Kopiermaschine

$T = (\Sigma; S; B; F; s_0; \varphi)$

$\Sigma = \{0,1\}$ $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_H\}$ $B = \{R, L, H\}$ $F = \{S_H\}$ $s_0 \in S$

$\varphi : (e_i; S_j) \rightarrow (e_k; S_r; b_s)$



S_0	0	S_1	0	R
S_0	1	S_0	1	L
S_1	0	S_6	0	R
S_1	1	S_2	0	R
S_2	0	S_3	0	R
S_2	1	S_2	1	R
S_3	0	S_4	1	L
S_3	1	S_3	1	R

S_4	0	S_5	0	L
S_4	1	S_4	1	L
S_5	0	S_1	1	R
S_5	1	S_5	1	L
S_6	0	S_H	0	H
S_6	1	S_6	1	R

Die Additionsmaschine

Beispiel für die Turingmaschine, die die Summe zweier mit Einsen kodierter Zahlen auf das Band schreibt:

Kodierung : $1 \mathrel{\hat{=}} 1$; $2 \mathrel{\hat{=}} 11$........ $n \mathrel{\hat{=}} \underbrace{11.......1}_{n}$

Beispiel: 2+3=5

Startbeschriftung:

0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2 + 3

Endbeschriftung:

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5

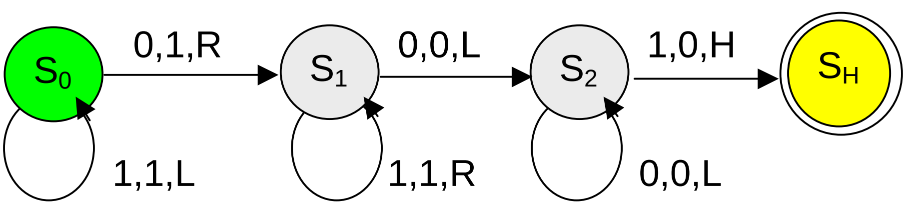
Lösungsidee:

nach links laufen, bis eine 0 kommt
0 mit 1 überschreiben
nach rechts laufen, bis eine 0 kommt
eine Position nach links
1 mit 0 überschreiben
eine Position nach links
Halt

$T = (\Sigma; S; B; F; s_0; \varphi)$

$\Sigma = \{0,1\}$ $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_H\}$ $B = \{R,L,H\}$ $F = \{S_H\}$ $s_0 \in S$

$\varphi : (e_i; S_j) \rightarrow (e_k; S_r; b_s)$



Die Subtraktionsmaschine

Beispiel für die Turingmaschine, die die Differenz zweier mit Einsen kodierter Zahlen auf das Band schreibt:

Kodierung : $1 \triangleq 1;\ 2 \triangleq 11........\ n \triangleq \underbrace{11.......1}_{n}$

Beispiel 1 : 5-3=2

Startbeschriftung:

0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

5 - 3

Endbeschriftung:

0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5

Beispiel 2 : 3 – 5 = -2

Startbeschriftung:

0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

3 - 5

Endbeschriftung:

0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- 2

Die Subtraktionsmaschine

Lösungsidee: Es wird paarweise jeweils eine 1 beim Minuenden und eine 1 beim Subtrahenden mit 0 überschrieben (gelöscht). Ist einer der beiden Operanden leer, dann bleibt die Differenz stehen. Ist der Minuend kleiner als der Subtrahend wird noch eine 1 vor das Ergebnis gesetzt.

nach links laufen, bis eine 0 kommt	
eine Position nach links	
nach links laufen, bis eine 0 kommt	
eine Position nach rechts	
solange noch 1en beim Subtrahenden vorhanden sind tue	
	1 mit 0 überschreiben eine Position nach rechts nach rechts bis eine 0 kommt eine Position nach rechts nach rechts bis eine 0 kommt eine Position nach links
0 mit 1 überschreiben	
eine Position nach links	
Halt	

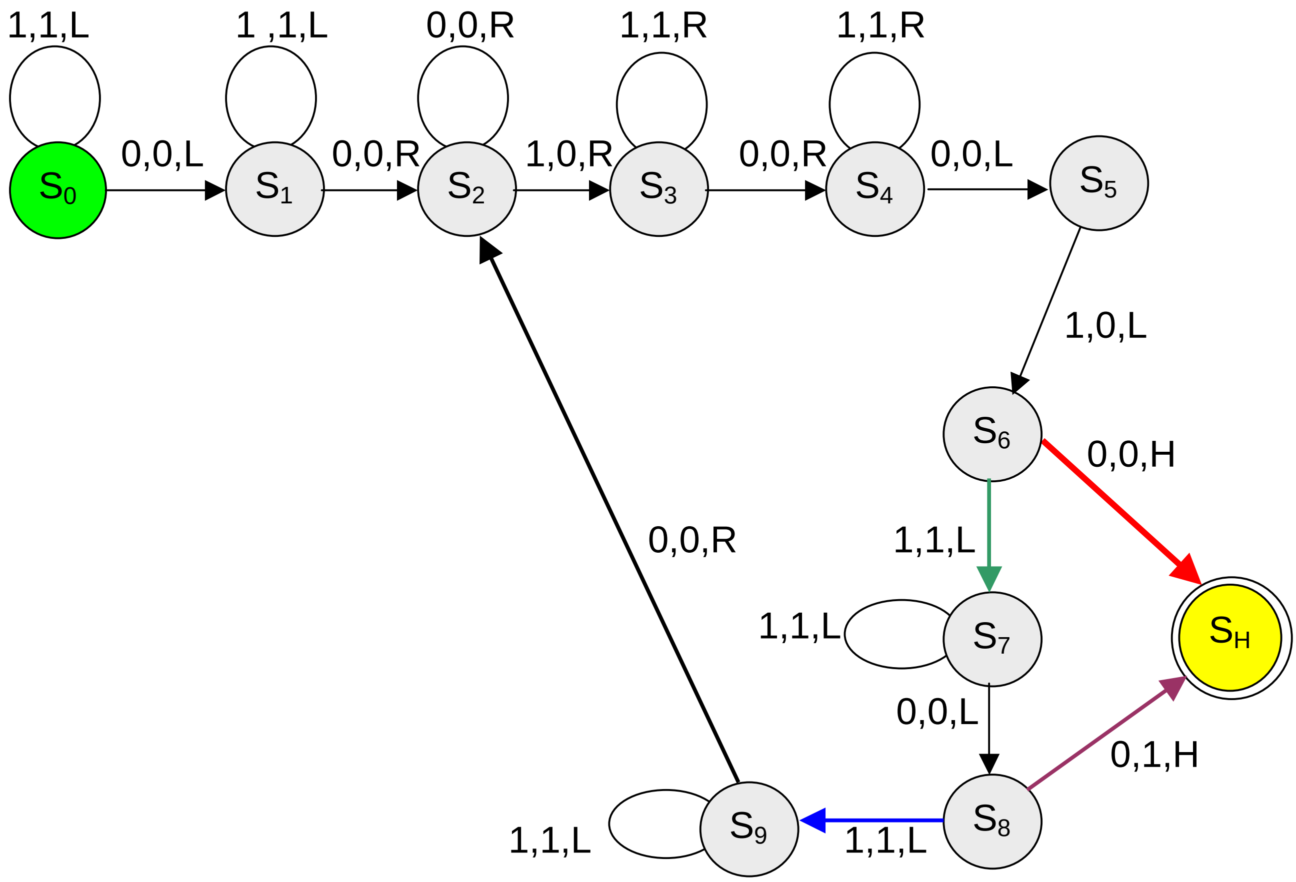
Die Subtraktionsmaschine

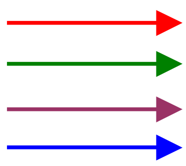
$T = (\Sigma; S; B; F; s_0; \varphi)$

$\Sigma = \{0,1\}$ $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_H\}$

$B = \{R,L,H\}$ $F = \{S_H\}$ $s_0 \in S$

$\varphi : (e_i; S_j) \rightarrow (e_k; S_r; b_s)$





Subtrahend gelöscht
Subtrahend enthält noch 1en
Minuend gelöscht
Minuend enthält noch 1en

Die Multiplikationsmaschine

Beispiel für die Turingmaschine, die den Quotienten zweier mit Einsen kodierter Zahlen auf das Band schreibt:

Kodierung : $1 \triangleq 1;\ 2 \triangleq 11 \ldots\ldots\ n \triangleq \underbrace{11\ldots\ldots 1}_{n}$

Beispiel 1 : 2 * 3 = 6

Startbeschriftung:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0

2 * 3

Endbeschriftung:

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6

Lösungsidee: Für jede 1 des zweiten Faktors wird der 1. Faktor (d.h. die Einsergruppe des 1. Faktors) auf der linken Seite kopiert.
Die 1 des 2. Faktors, für die gerade der 1. Faktor kopiert wird, wird mit 0 überschrieben (gelöscht).
Ist der 2. Faktor gelöscht, dann wird zum letzen Mal der 1. Faktor kopiert und anschließend auch der 2. Faktor gelöscht.

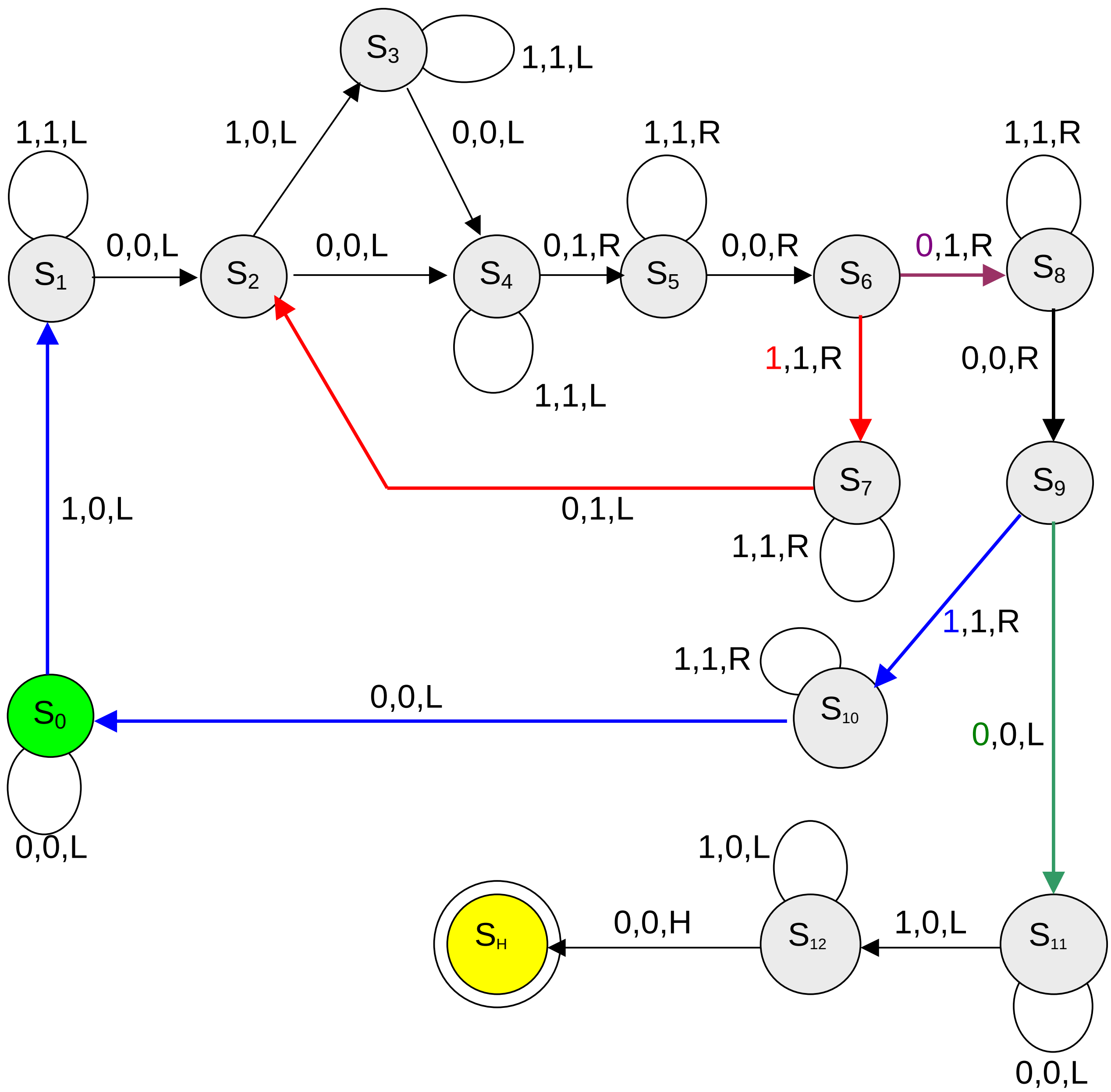
Die Multiplikationsmaschine

$T=(\Sigma;S;B;F;s_0;\varphi)$

$\Sigma=\{0,1\}$ $S=\{s_0,s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,s_7,s_8,s_9,s_{10},s_{11},s_{12},s_H\}$

$B=\{R,L,H\}$ $F=\{S_H\}$ $s_0\in S$

$\varphi:(e_i;S_j)\to(e_k;S_r;b_s)$



1. Faktor (Einsergruppe) kopieren
fertig kopiert
2. Faktor gelöscht
2. Faktor enthält noch 1en, erneut kopieren

Die Divisionssmaschine

Beispiel für die Turingmaschine, die den Quotienten zweier mit Einsen kodierter Zahlen auf das Band schreibt:

Kodierung : $1 \mathrel{\hat{=}} 1$; $2 \mathrel{\hat{=}} 11$......... $n \mathrel{\hat{=}} \underbrace{11.......1}_{n}$

Beispiel 1 : 8 : 4=2

Startbeschriftung:

0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
								8					:		4						

Endbeschriftung:

0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		2																			

Beispiel 1 : $8 : 3 = 2 + \frac{2}{3}$

Startbeschriftung:

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
								8					:		3						

Endbeschriftung:

0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
				2					+				2	:		3					

Die Divisionsmaschine

$$T = (\Sigma;S;B;F;s_0;\varphi)$$

$\Sigma = \{0,1\}$ $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots s_{40}, s_{41}, s_{42}\}$

$B = \{R,L,H\}$ $F = \{S_{42}\}$ $s_0 \in S$

$$\varphi : (S_j;e_i) \rightarrow (S_r;e_k;b_s)$$

000 0 001 0 L	011 0 011 0 L	022 0 022 0 L	033 0 033 0 R
000 1 000 1 L	011 1 012 1 L	022 1 023 1 L	033 1 008 0 R
001 0 002 0 R	012 0 013 0 R	023 0 024 0 R	034 0 042 0 H
001 1 001 1 L	012 1 039 1 L	023 1 023 1 L	034 1 035 0 R
002 0 002 0 R	013 0 042 0 H	024 0 042 0 H	035 0 036 0 R
002 1 003 1 L	013 1 014 1 R	024 1 042 0 H	035 1 042 1 H
003 0 004 0 L	014 0 014 0 R	025 0 025 1 L	036 0 037 0 L
003 1 004 0 L	014 1 015 1 L	025 1 026 1 R	036 1 036 0 R
004 0 005 1 L	015 0 016 1 L	026 0 042 0 H	037 0 037 0 L
004 1 005 1 L	015 1 042 1 H	026 1 027 0 L	037 1 038 1 L
005 0 006 0 R	016 0 017 0 L	027 0 042 0 H	038 0 042 0 H
005 1 006 0 R	016 1 042 1 H	027 1 028 1 L	038 1 038 1 L
006 0 007 1 R	017 0 018 0 L	028 0 034 0 R	039 0 040 0 R
006 1 007 1 R	017 1 021 1 L	028 1 029 1 L	039 1 039 1 L
007 0 008 0 R	018 0 018 0 L	029 0 041 0 L	040 0 042 0 H
007 1 042 1 H	018 1 019 1 L	029 1 029 1 L	040 1 008 0 R
008 0 009 0 R	019 0 020 1 R	030 0 031 1 L	041 0 041 0 L
008 1 008 1 R	019 1 019 1 L	030 1 030 1 L	041 1 030 1 L
009 0 009 0 R	020 0 014 0 R	031 0 032 0 R	
009 1 010 0 R	020 1 020 1 R	031 1 032 0 R	
010 0 025 0 L	021 0 022 0 L	032 0 033 0 R	
010 1 011 1 L	021 1 021 1 L	032 1 032 1 R	