Primzahlgeheimnis 1

Man weiß, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen immer mindestens eine Primzahl liegt:

Vervollständige die Quadrate und kringele alle Primzahlen ein:

1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	**101**	**122**
4	3	6	11	18	27	38	51	66			
9	8	7	12	19	28	39	52	67			
16	15	14	13	20	29	40	53	68			
25	24	23	22	21	30	41	54	69			
36	35	34	33	32	31	42	55	70			
49	48	47	46	45	44	43	56	71			
64	63	62	61	60	59	58	57	72			
81	80	79	78	77	76	75	74	73			

Fülle damit die folgende Tabelle aus:

Primzahlen		
zwischen		und
1		4
4		9
9		16
16		25
25		36
36		49
49		64
64		81
81		100
100		121
121		144

Primzahlgeheimnis 2

Satz von Tschebyscheff (1852) :

Für jede natürliche Zahl n>1 gilt :
Zwischen n und $2 \cdot n$ liegt mindestens eine Primzahl!

Tschebyscheff
(1821-1894)

Fülle damit die folgende Tabelle aus:

Primzahlen		
zwischen		und
2		4
3		6
4		8
5		10
6		12
7		14
….		….
10		20
15		30
40		80
55		110

Primzahlgeheimnis 3

Man kann jede Zahl, die keine Primzahl und die größer als 1 ist, eindeutig als Produkt mit lauter Primzahlen (Primfaktoren) schreiben.
Die Primzahlen sind also die Bausteine für alle anderen Zahlen.

Man nennt dieses Verfahren Primfaktorzerlegung

Beispiel:

$1000 = 20 \cdot 50$ $= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ $= 2^3 \cdot 5^3$	$345 = 5 \cdot 69$ $= 5 \cdot 3 \cdot 23$	$704 = 64 \cdot 11$ $= 2^6 \cdot 11$

Vorsicht: Große Zahlen lassen sich nur sehr schwer in Primfaktoren zerlegen!

Aufgabe : Zerlege folgende Zahlen in Primfaktoren:

48=	120=	280=
512=	900=	2400=

Primzahlgeheimnis 4

Satz von Euklid :

Es gibt unendlich viele Primzahlen d.h. es gibt keine größte (letzte) Primzahl.

Euklid
(330-275 v.Chr.)

Der Beweis dieses Satzes ist seit der Antike weltberühmt und so einfach, dass du ihn mit etwas Konzentration auch verstehen kannst.

Ich will ihn dir an einem Beispiel klar machen :

Nehmen wir an, die Zahl 13 sei die größte (und damit letzte) Primzahl. D.h. es gibt nur die Primzahlen

2,3,5,7,11,13

Betrachen wir jetzt die Zahl

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$$

Das ist das Produkt aller Primzahlen bis zur Zahl 13 um 1 vergrößert.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten

1. Fall : 30031 ist eine Primzahl.

In diesem Fall hätten wir eine weitere Primzahl >13 gefunden.
Widerspruch zur Annahme, d.h. die Annahme ist falsch !

2. Fall: 30031 ist keine Primzahl

D.h. diese Zahl muss dann noch mindestens einen Teiler außer 1 und 30031 besitzen, denn eine Zahl die keine Primzahl (und größer als 1) ist, hat mindestens 3 Teiler.

Dieser Teiler lässt sich dann eindeutig als Produkt mit lauter Primfaktoren schreiben. (→ **Primzahlgeheimnis 3**).

Da weder 2 noch 3 noch 5 noch 7 noch 11 und 13 Teiler von 30031 sind, muss es mindestens noch eine weitere Primzahl geben, die größer als 13 ist und gleichzeitig Teiler von 30031 ist.

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass 13 die größte Primzahl ist.

D.h. in jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, dass 13 die letzte Primzahl ist. Diese Annahme ist falsch, d.h. es gibt mindestens noch eine weitere (größere) Primzahl. Wir nennen sie p1.

→Übrigens ist 30031 keine Primzahl, denn $30011 = 59 \cdot 509$!!
d.h. wir haben mit 59 und 509 sogar zwei neue größere Primzahlen gefunden !
Jetzt kannst du weiter überlegen:

Nehmen wir an, die Zahl p1 sei die größte (und damit letzte) Primzahl. D.h. es gibt nur die Primzahlen

2,3,5,7,11,13,……..,p1

Betrachen wir jetzt die Zahl

$$z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots p1 + 1$$

Das ist das Produkt aller Primzahlen bis zur Zahl p1 um 1 vergrößert.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten

1. Fall : z ist eine Primzahl.
In diesem Fall hätten wir eine weitere Primzahl >p1 gefunden.
Widerspruch zur Annahme, d.h. die Annahme ist falsch !

2. Fall: z ist keine Primzahl.
D.h. diese Zahl muss dann noch mindestens einen Teiler außer 1 und z besitzen, denn eine Zahl die keine Primzahl (und größer als 1) ist, hat mindestens 3 Teiler.

Dieser Teiler lässt sich dann wieder eindeutig als Produkt mit lauter Primfaktoren schreiben. (→ **Primzahlgeheimnis 3**).
Da weder 2 noch 3 noch 5 noch 7 noch 11 …….noch p1 Teiler von z sind, muss es mindestens noch eine weitere Primzahl geben, die größer als p1 ist und gleichzeitig Teiler von z ist.
Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass p1 die größte Primzahl ist.

D.h. Zu jeder Primzahl findest du immer noch eine größere !

Aufgabe:

Wenn Euklid schon das Primzahlgeheimnis 2 (Satz von Tschebyscheff) gekannt hätte, dann hätte er auch damit begründen können, dass es keine letzte Primzahl geben kann !

Schreibe auf, wie man mit der Kenntnis des Satzes von Tschebyscheff begründen kann, dass es keine letzte Primzahl geben kann:

Primzahlgeheimnis 5

Goldbachsche Vermutung 2 (aus dem Jahr 1742)**:**

Jede gerade Zahl $z \geq 4$ lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben !

Dieser Satz ist allgemein bis heute noch nicht bewiesen worden. Man weiß aber, dass er bis $z = 10^{14}$ stimmt !

Christian Goldbach (1690-1764)

Weißt du noch, was 10^{14} für eine Zahl ist?

$10^{14} =$ ____

Aufgabe: Zeige die Gültigkeit der Vermutung für folgende Zahlen:
(Verwende dazu unsere Primzahltabelle)

4	=2+2
6	=3+3
8	=3+5
10	=3+7
12	=5+7
14	
16	
….	
20	
36	
50	
100	
128	
130	
150	

Primzahlgeheimnis 5

Goldbachsche Vermutung 3 (1742):

Jede ungerade Zahl größer als 5 lässt sich als Summe dreier Primzahlen schreiben !

Dieser Satz ist allgemein bis heute noch nicht bewiesen worden.

Christian Goldbach
(1690-1764)

Aufgabe: Zeige die Gültigkeit der Vermutung für folgende Zahlen:

7	=2+2+3
9	=2+2+5 =3+3+3
11	=3+3+5 =2+2+7
13	=3+5+5 =3+3+7
15	
17	
19	
21	
35	
51	
99	
101	
119	

Primzahlgeheimnis 6

Mersenne-Zahlen

Das sind Zahlen der Form $z = 2^n - 1$ mit $n \geq 2$

Mersenne hat folgende Entdeckung gemacht :

Ist n keine Primzahl, dann ist z auch keine Primzahl !

Ist n eine Primzahl, dann kann z eine Primzahl sein ! (muss aber nicht)

Marin Mersenne
(1588-1648)

Für die ersten Mersenne-Zahlen ist die Überprüfung, ob es sich um Primzahlen handelt, einfach:

n	$2^n - 1$	
2	3	1. Mersenne-Primzahl
3	7	2. Mersenne-Primzahl
4	15	kann keine Primzahl sein, weil 4 keine Primzahl ist
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Mersenne-Zahlen sind ideale Kandidaten für Primzahlen, da es für sie viel einfachere Überprüfungsmethoden gibt, mit denen man zeigen kann, dass es sich um Primzahlen handelt.

→ Die größten bekannten Primzahlen sind alle Mersenne-Zahlen !

Poststempel aus den USA 1968 mit der Meldung $2^{11213}-1$ ist eine Primzahl	

Den Rekord hielt bis 1998 ein amerikanischer Student, der im Januar 1998 die Primzahl $2^{3021377}$-1 entdeckte. Das ist eine Zahl mit 909526 Stellen.

Im Jahr 2001 wurde mit $2^{13.466.917}$-1 die 39. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 4 053 946 Stellen.

Im Jahr 2003 wurde mit $2^{20.996.011}$-1 die 40. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 6 320 430 Stellen.

Im Jahr 2004 wurde mit $2^{24.036.583}$-1 die 41. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 7 235 733 Stellen.

Im Jahr 2005 wurde mit $2^{25.964.951}$-1 die 42. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 7 816 230 Stellen.

Im Dezember 2005 wurde mit $2^{30.402.457}$-1 die 43.?Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 9 152 052 Stellen.

Im September 2006 wurde mit $2^{32.582.657}$-1 die 44.? Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 9 808 358 Stellen. (Rechenzeit 9 Monate auf 700 Computern)

I 2008 wurde mit $2^{37.156.667}$-1 die 45. Mersenne-Primzahl entdeckt.

2009 wurde mit $2^{42.643.801}$-1 die 46. Mersenne-Primzahl entdeckt.

2018 wurde mit$2^{82.589.933}$-1 die 51. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Liste der bekannten Mersenne-Primzahlen $2^n - 1$

Nr.	n	Anz.Ziffern von M(n)	Jahr		Nr.	n	Anz.Ziffern von M(n)	Jahr
1	2	1			25	21701	6533	1978
2	3	1			26	23209	6987	1979
3	5	2			27	44497	13395	1979
4	7	3			28	86243	25962	1982
5	13	4	1456		29	110503	33265	1988
6	17	6	1588		30	132049	39751	1983
7	19	6	1588		31	216091	65050	1985
8	31	10	1772		32	756839	227832	1992
9	61	19	1883		33	859433	258716	1994
10	89	27	1911		34	1257787	378632	1996
11	107	33	1914		35	1398269	420921	1996
12	127	39	1876		36	2976221	895932	1997
13	521	157	1952		37	3021377	909526	1998
14	607	183	1952		38	6972593	2098960	1999
15	1279	386	1952		39	13466917	4053946	2001
16	2203	664	1952		40	20996011	6320430	2003
17	2281	687	1952		41	24036583	7235733	2004
18	3217	969	1957		42	25964951	7816230	2005
19	4253	1281	1961		43	30402457	9152052	2005
20	4423	1332	1961		44	32582657	9308358	2006
21	9689	2917	1963		45	37156667	11185272	2008
22	9941	2993	1963		46	42643801	12837064	2009
23	11213	3376	1963		47	43112609	12978189	2008
24	19937	6002	1971		48	57885161	17425170	2013
25	21701	6533	1978		51	82.589.933	23.249.425	2018

Seit 1951 mit Computerunterstützung.
Seit 1996 alle mit dem GIMPS Projekt

GIMPS Great Internet Mersenne Prime Search

Primzahlgeheimnis 7

Fermat-Zahlen

Das sind Zahlen der Form $z = 2^n + 1$ mit $n \geq 0$

Fermat hat folgende Entdeckung gemacht :

Nur wenn n selbst eine Zweierpotenz ist, kann z eine Primzahl sein.

Pierre de Fermat
1601-1665

Fermat vermutete, dass z immer eine Primzahl ist, wenn n eine Zweierpotenz ist.

Das stimmt auch für $n = 2^0$; $n = 2^1$; $n = 2^2$; $n = 2^3$ und $n = 2^4$

Für $n = 2^5$ konnte Leonard Euler im Jahr 1732 zeigen, dass $z = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641*6700417$ und damit keine Primzahl ist. Die Vermutung war also falsch!

Diese Zerlegungen sind sehr schwer zu finden, da die Fermat-Zahlen schnell sehr groß werden. Ohne Computer lassen sich diese Zerlegungen kaum finden.

Bis heute sind außer den oben genannten Zahlen keine weiteren Fermat-Zahlen bekannt, die Primzahlen sind.

Es ist also ungeklärt, ob es noch weitere Fermat-Primzahlen gibt.

Primzahlgeheimnis 8

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge sind Paare von zwei Primzahlen zwischen denen nur eine gerade Zahl liegt.

Beispiele: (3;5) (5;7) (11;13) …………..(p;p+2)….

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Das bisher größte gefundene Zwillingspaar (Juni 2006) ist

$$(\ 100314512544015 \cdot 2^{171960} - 1\ ;\ 100314512544015 \cdot 2^{171960} + 1\ )$$

http://primes.utm.edu/largest.html

Aufgabe:

Suche aus der Primzahltabelle alle Zwillinge bis 1000 heraus.

Primzahlgeheimnis 9

Primzahldrillinge

Primzahldrillinge sind Tripel von drei Primzahlen zwischen denen jeweils nur eine gerade Zahl liegt.

Beispiel: (3;5;7)……..(p;p+2;p+4)……………

Man kann beweisen, dass es nur einen Primzahldrilling, nämlich (3;5;7) gibt

Wie lässt sich das beweisen?

Wenn p eine beliebige Primzahl >3 ist, dann ist eine der beiden Zahlen p+2 oder p+4 durch 3 teilbar und damit keine Primzahl.

Sei also p eine beliebige Primzahl >3

Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) p lässt bei der Division mit 3 den Rest 1 — z.B. p=13
Dann ist aber p+2 mit 3 teilbar und damit — p+2=15
keine Primzahl
2.) p lässt bei der Division mit 3 den Rest 2 — z.B. p=29
Dann ist aber p+4 mit 3 teilbar und damit — p+4=33
keine Primzahl

Aufgabe:

Begründe, warum es keine Primzahlvierlinge, Primzahlfünflinge…u.s.w. geben kann:

Primzahlgeheimnis 10

Fast-Primzahldrillinge

Fast-Primzahldrillinge sind Tripel die einen Primzahlzwilling enthalten und eine weitere Primzahl, zwischen der und einer Zwillingszahl höchstens 2 gerade Zahlen liegen:

Beispiel: (5;7;11) (7; 11;13)……..(p;p+2;p+4)…(p;p+4;p+6)..

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Fast-Primzahldrillinge gibt.

Aufgabe:

Bestimme alle Fast-Primzahldrillinge bis 100 :

(5;7;11) (7; 11;13)

Fast-Primzahlvierlinge

Fast-Primzahlvierlinge sind Viertupel die zwei Primzahlzwillinge enthalten zwischen denen höchstens 2 gerade Zahlen liegen:

Beispiel: (5;7;11;13) (11;13;17;19) ……..(p;p+2;p+6;p+8)……

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Fast-Primzahlvierlinge gibt.

Bestimme alle Fast-Primzahlvierlinge bis 120 :

Primzahlgeheimnis 11

Sophie-Germain-Primzahlen

Eine Primzahl p heißt so nach der französischen Mathematikerin Sophie Germain (1776-1831) wenn auch die Zahl 2p+1 eine Primzahl ist.

Beispiel:
2 ist eine Sophie-Germain-Primzahl, weil $2 \cdot 2 + 1 = 5$ auch prim ist.
1013 ist eine Sophie-Germain-Primzahl, weil $2 \cdot 1013 + 1 = 2027$ auch prim ist.

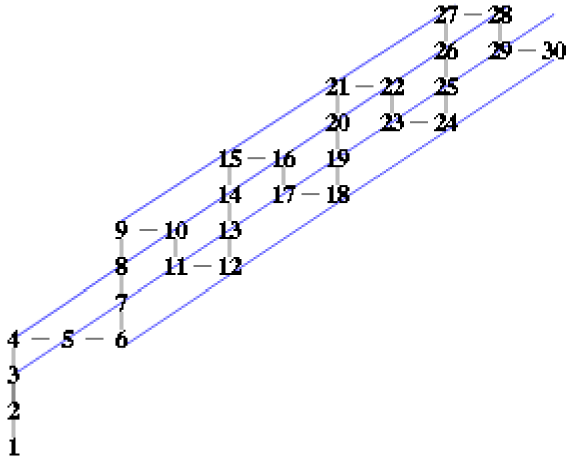
Suche aus der Primzahltabelle die Sophie-Germain-Primzahlen von 2 bis 1013 heraus.

2											

Die größte bekannte Sophie-Germain-Primzahl ist
$70685552^{121301} + 1$ eine Zahl mit 36523 Stellen, die 2005 entdeckt wurde

Markiere in dieser Tabelle die Sophie-Germain-Primzahlzwillinge

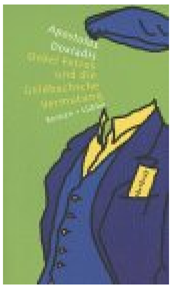
a) Vervollständige die Zahlenschlange bis 50.



b) Auf welcher Geraden liegen die Primzahlen?

c) Welchen Teiler haben die Zahlen auf den anderen Geraden jeweils gemeinsam?

Rezension



Onkel Petros und die Goldbachsche Vermutung

Apostol Doxiadis
Lübbe-Verlag, 2001, 220 Seiten, 8,45 Euro
ISBN: 378570951X

Das Grundgerüst der Handlung dieses Romans lässt sich so zusammenfassen: Onkel Petros, der Onkel des Ich-Erzählers, ist schon in jungen Jahren von der Mathematik fasziniert. Sein Lebensziel ist es, die *Goldbach-Vermutung* zu beweisen, also die Aussage, dass sich jede gerade Zahl größer als drei als Summe von zwei Primzahlen schreiben lässt. Onkel Petros hat schöne Teilerfolge, scheitert aber letztlich tragisch.
Was für ein Stoff, wie leicht hätte man daraus einen zwar belehrenden, aber doch im Wesentlichen trockenen Roman stricken können! Nicht so Apostol Doxiadis. Natürlich lernt man auch hier einiges: etwa über die Goldbach-Vermutung und andere Sachverhalte aus der Zahlentheorie, oder über berühmte Mathematiker wie zum Beispiel Euler, Hardy und Ramanujan. Es ist aber ein Roman geworden, der einen wirklich fesselt, man nimmt wirklich Anteil am Leben des Onkels.
Wichtiger noch ist, dass Doxiadis das Kunststück gelingt, die von der Mathematik ausgehende Faszination lebendig werden zu lassen. Wie kommt es, dass Mathematiker die "wirkliche" Welt mitunter hinter sich lassen und sich ganz ihrem Fach widmen? Sind es die ewigen Wahrheiten? Ist es die intellektuelle Herausforderung? Der Rezensent findet das Buch sehr empfehlenswert. Für alle, die irgendwie mit Mathematik zu tun haben und auch als Geschenk für Lebenspartner von Berufsmathematikern, die nach der Lektüre vielleicht besser verstehen, warum der/die andere manchmal in einer anderen Welt verschwunden zu sein scheint.
(Übrigens: Die gleichen Qualitäten hat das Buch von Schogt, das könnten Sie dann beim nächsten Mal verschenken.)

(Rezension: Ehrhard Behrends)

Nach dem "Palindromjahr" 2002 ist das "Primzahljahr" 2003 ein besonderer Anlass, zumindest eine Bemerkung über die Zahlen zu machen, die beide Eigenschaften haben, die sogenannten "Prim-Palindrome" wie z. B.: 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, ... , 71317 , ... , 13475431 , ...

Zufall: Im "Palindromjahr 2002" im Urlaubs-Hotel in Hurghada ein "Prim-Palindrom" als Zimmernummer.

Ob die Menge der Prim-Palindrome unendlich ist, konnte bisher weder bewiesen noch widerlegt werden.

Diese offene Frage lässt nur die Aussage über das "größte bekannte Prim-Palindrom" zu. Der gegenwärtige Rekord (Ende 2005) ist nach meiner Information die Zahl

$$10^{130046} + 116010611 * 10^{65014} + 1$$

Dass diese Zahl ein Palindrom ist, kann man leicht nachvollziehen: Die 1 an der Spitze der 130.037-ziff findet ihr Spiegelbild in der 1 am Ende, die übrigen Ziffern sind Nullen bis auf die spiegelbildliche Ziff 116010611 in der "Mitte". Dass es eine Primzahl ist, wird auf dieser Internetseite behauptet).

A002385 Palindromic primes. +0 82
(Formerly M0670 N0247)

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721, 12821, 13331, 13831, 13931, 14341, 14741, 15451, 15551, 16061, 16361, 16561, 16661, 17471, 17971, 18181
(list; graph; listen)

Marcus du Sautoy
Die Musik der Primzahlen
Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik
dtv Taschenbücher Bd.34299

2006. 397 S. m. Abb. 21 cm

Einband: Kartoniert
Verlag: DTV
Bestell Nr.: 1766
ISBN: 9783423342995
Produktart: Sachbuch

Preis:
Deutschland **12,50 EUR** | Österreich **12,90 EUR**

lieferbar

In den Warenkorb

Multifactorial Primes

del.icio.us
Mister Wong

In diesem Projekt wird nach Primzahlen der Form *n*!*x* +/-1 gesucht, welche als *Multifactorials* bezeichnet werden. *x* reicht in diesem Projekt von 2 bis 25.

n!*x* ist definiert als $n \cdot (n-x) \cdot (n-2 \cdot x) \cdot \ldots$, das heißt als Produkt aller der Zahlen zwischen 1 und *n*, die den gleichen Rest wie *n* modulo *x* lassen. Beispiele:

$12!3 - 1 = 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 - 1$
$105!17 + 1 = 105 \cdot 88 \cdot 71 \cdot 54 \cdot 37 \cdot 20 \cdot 3 + 1$

Sätze von Fermat:
Wenn p eine Primzahl ist und n eine Natürliche Zahl, die kein Vielfaches von p ist, dann ist n^{p-1} stets um 1 größer als das nächst kleinere Vielfache von p (sogenannter Kleiner Satz von Fermat → Beweis).

Beispiele: a) $4^{5-1} = 4^4 = 25\underline{\mathbf{6}}$, $25\underline{\mathbf{5}} = 5 \cdot 51$

b) $13^{17-1} = 13^{16} = 66541660918317984\underline{\mathbf{1}}$, $66541660918317984\underline{\mathbf{0}} = 39142153481363520 \cdot 17$

Jede Primzahl p, die sich durch p=4n+1 erzeugen lässt ($n \in \mathbb{N}$), lässt sich eindeutig als Summe von zwei ganzzahligen Quadraten darstellen (Bsp.: $233=8^2+13^2$).

Satz von Lagrange: Jede natürliche Zahl n lässt sich als Summe von höchstens vier Quadraten ganzer Zahlen darstellen.

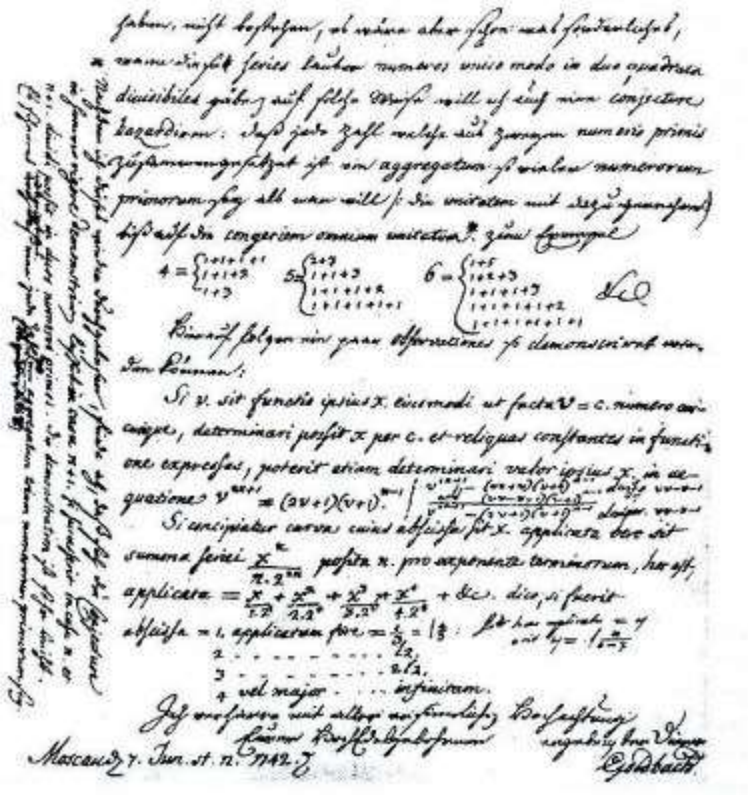
Satz von Dirichlet: Wenn ggT(a,b)=1, dann gibt es unendlich viele Primzahlen p der Form $p = n \cdot a + b$ ($n \in \mathbb{N}$).

Dreiprimzahlsatz: Jede ungerade natürliche Zahl ≥9 ist Summe dreier ungerader Primzahlen. (Vergleiche mit der Goldbachschen Vermutung)

Primzahlen sind rätselhaft

Eine Primzahl ist bekanntlich eine Zahl, die genau zwei Teiler hat, 1 ist also keine Primzahl. *Teilen* bedeutet hier *Teilen ohne Rest bzw. der Rest ist null*. Nun sollte man meinen, dass die Primzahlen, die so einfach zu erklären sind, mathematisch außerordentlich einfache Objekte sind. Sie sind es nicht, und das soll im folgenden an zwei berühmten Beispielen verdeutlicht werden.

Beispiel 1: Die Goldbachsche Vermutung



Der Diplomat und Hobby-Mathematiker Christian Goldbach lebte von 1690 bis 1764, also etwa zur Goethezeit. Er vermutete, dass jede positive gerade Zahl ab 4 als Summe von zwei Primzahlen zu schreiben ist, also

4= 2+2, 7=2+5, 12=5+7, 30=7+23 und 30=11+19, usw.

An der Zahl 30 sieht man, dass die Darstellung nicht eindeutig ist.
Das Wesentliche der Aussage liegt darin, dass sie für *jede* positive ganze Zahl gilt. Aber es ist leider nur eine Vermutung, und das seit ca. dreihundert Jahren. Der Russische Mathematiker Schnirelmann (1905-1938) bewies, dass sich jede positive gerade Zahl als Summe von höchstens 30000 Primzahlen darstellen lässt. Etwas später konnte der russische Mathematiker Vinogradoff mit Hilfe von Methoden, die von den Engländern Hardy und Littlewood und dem Inder Ramanujan stammen, das Ergebnis von Schnirelmann wesentlich verbessern: Ab einer gewissen Zahl N lässt sich jede größere ganze Zahl als Summe von 4 Primzahlen schreiben. Von der Zahl N weiß man leider nur, dass es sie gibt - mehr nicht.
Die Graphik zeigt den Brief, in dem Goldbach seine Vermutung dem Mathematiker Leonhard Euler mitteilte.

Beispiel 2: Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge sind Paare von Primzahlen, deren Differenz 2 ist. Also, 3 und 5, 11 und 13, 17 und 19, 29 und 31 usw. Man kann sich die Frage stellen, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Keiner weiß es. Das Problem hat übrigens seine speziellen Aspekte: Wenn man die reziproken Werte aller Primzahlzwillinge addiert,

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{31}\right)+\ldots$$

so ist ihre Reihe konvergent, d. h. es gibt einen endlichen Grenzwert. Das bewies der norwegische Mathematiker Viggo Brun. Man hat also keinen Überblick über den Bestand der Reihe, aber man weiß von ihrer Konvergenz. Wäre diese Reihe divergent, so wüsste man, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, so allerdings leider nicht.
Man könnte nun auf die Idee kommen, das beweise ich jetzt und fange mit meinen Überlegungen auch sofort an. Warum eigentlich nicht. Aber es ist große Vorsicht geboten: Zu beweisen, dass es unendlich viel Primzahlzwillinge gibt, könnte in den Wahnsinn führen, und wer will das schon.
(nev)