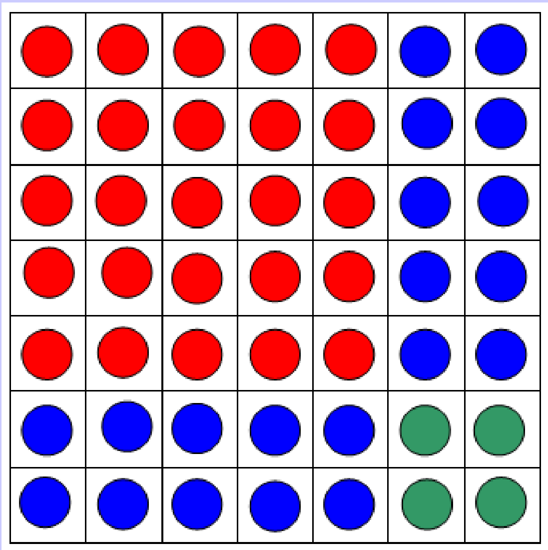
Binomische Formeln

Der italienische Mathematiker Luigi Binomi 1484-1543 hat den berühmten Formeln seinen Namen gegeben.

Luigi Binomi

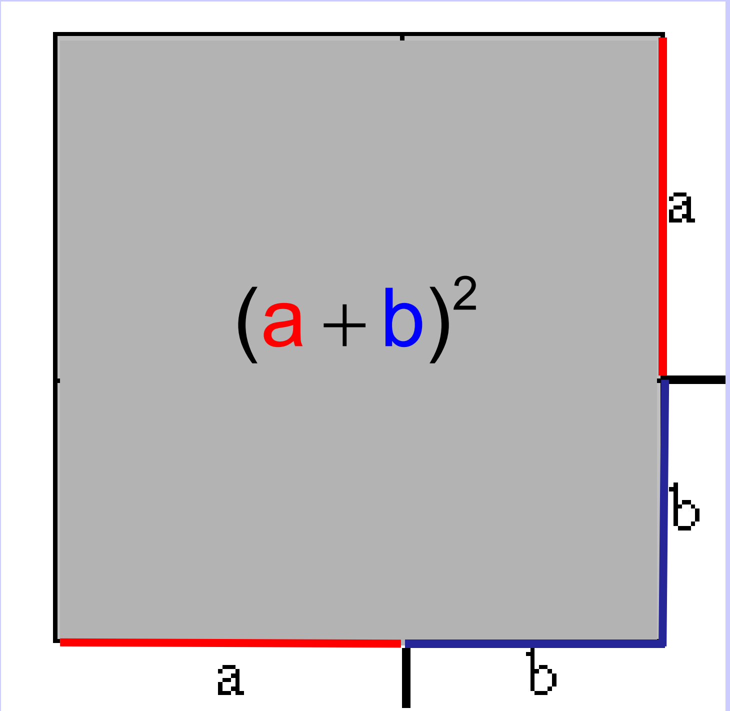
Einer Überlieferung nach hat er diese Formeln beim Legen von regelmäßigen Figuren mit Glasperlen entdeckt:

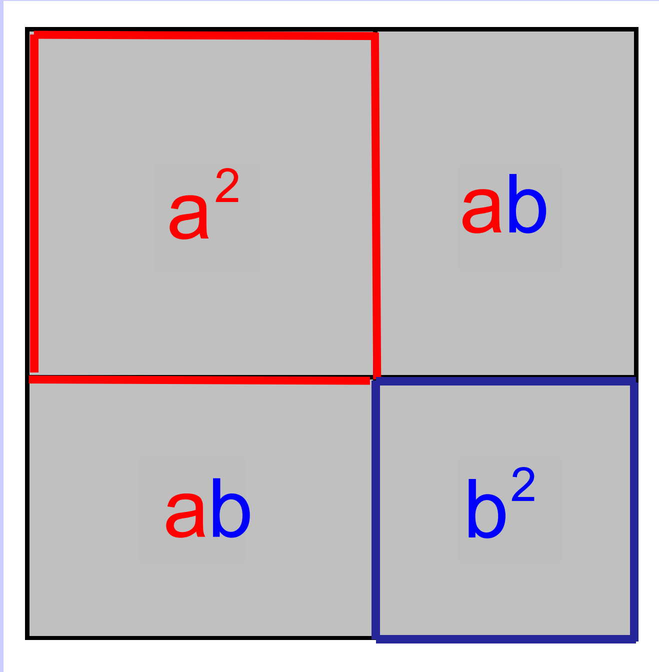


$$(5+2)^2 = 5^2 + 2\cdot 5\cdot 2 + 2^2$$

$$(7-2)^2 = 7^2 - 2\cdot 7\cdot 2 + 2^2$$

Die 1. Binomische Formel

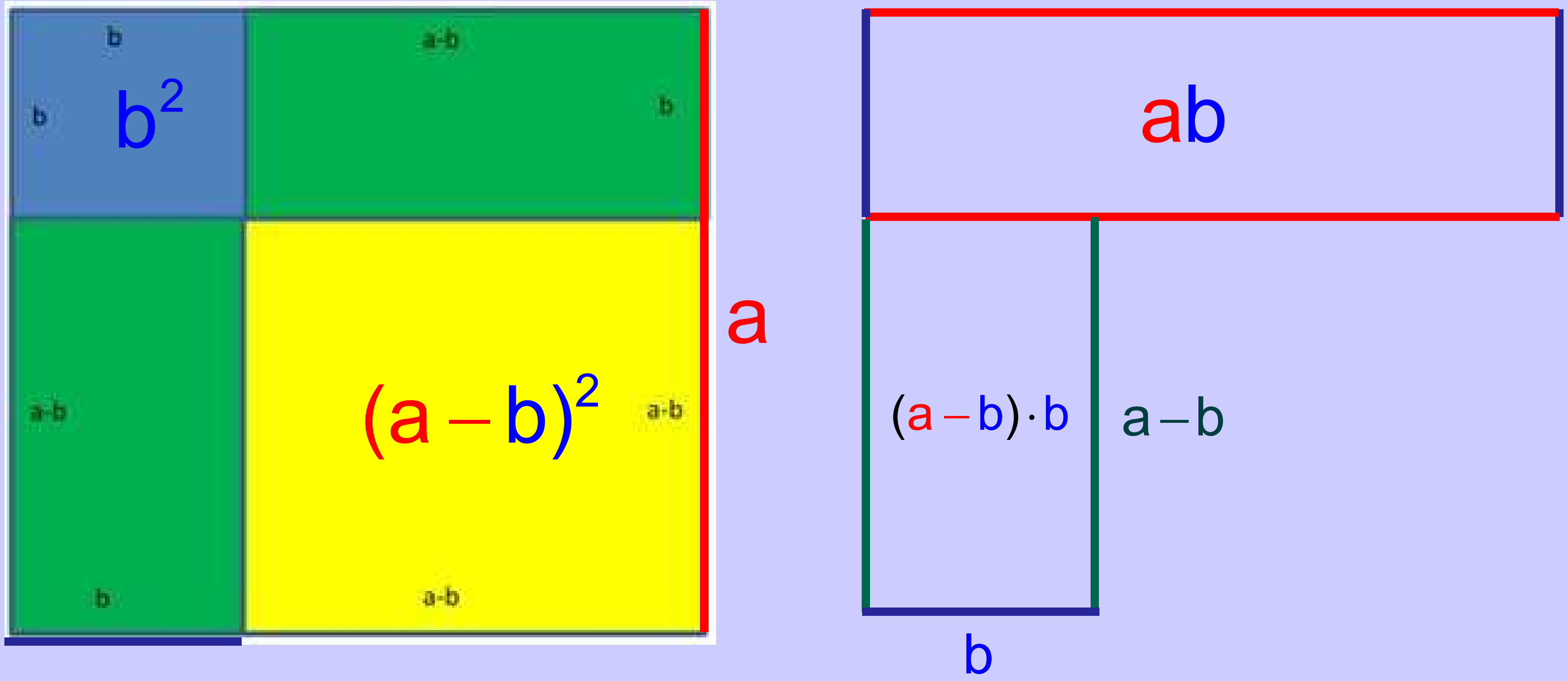




Alles klar !

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2$$

Die 2. Binomische Formel



$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= a^2 - ab - (a-b)\cdot b \\
&= a^2 - ab - ab + b^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

Die 1. und die 2. Binomische Formel

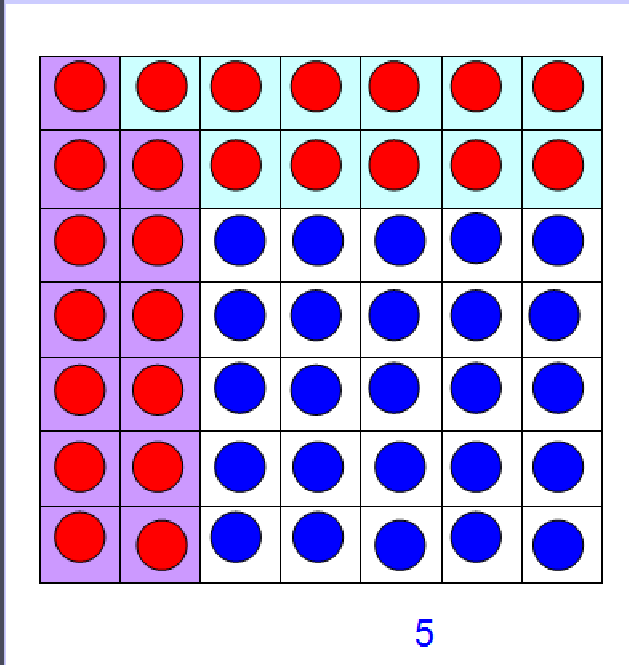
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

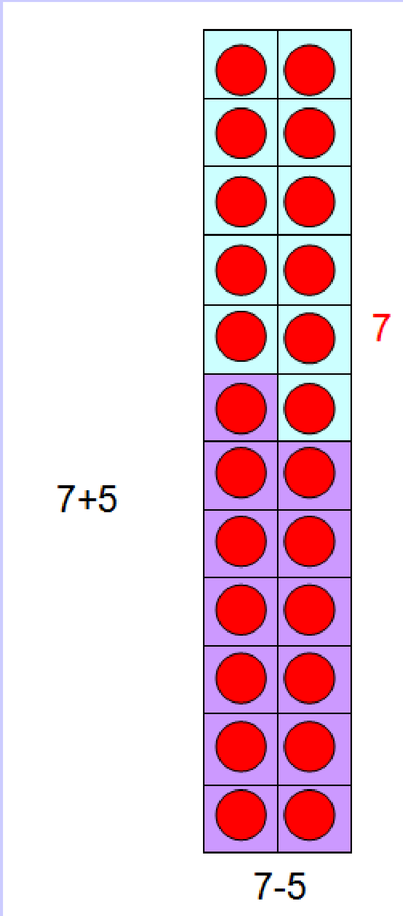
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(klim \pm bim)^2 = klim^2 \pm 2klimbim + bim^2$$

Logo!
2klimbim nicht vergessen und
Rechenzeichen beachten.

Die 3. Binomische Formel

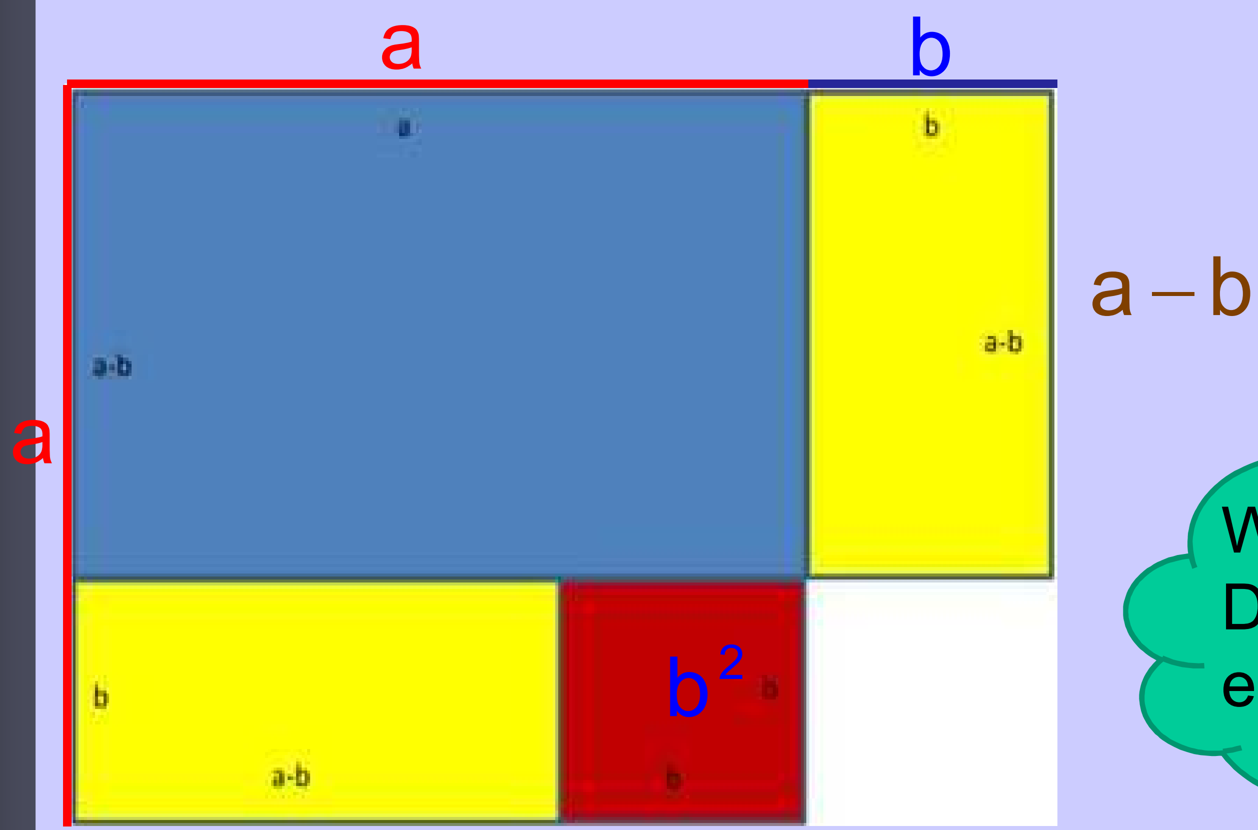




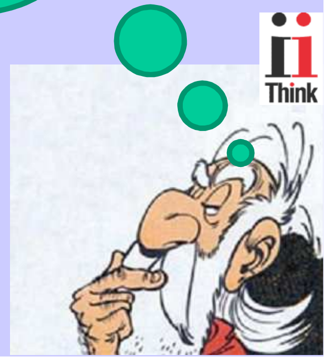
Die 3. Binomische Formel hat Binomi erst viel später entdeckt, weil sie nicht ganz so leicht zu sehen ist.

$$(7+5)(7-5)=7^2-5^2$$

Die 3. Binomische Formel



Wow!
Das muss man erst
einmal sehen!



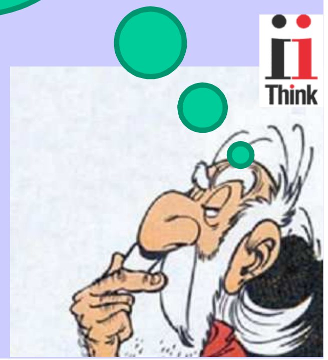
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Die 3. Binomische Formel

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(\text{klim}+\text{bim})\cdot(\text{klim}-\text{bim})=\text{klim}^2-\text{bim}^2$$

Bei mir läuten jetzt die Glocken!



Anwendungen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(X+6)^2 = x^2 + 12x + 36$$

$$(x^2+5)^2 = x^4 + 10x^2 + 25$$

$$(w-1)^2 = w^2 + 2w + 1$$

$$(y^3+y^2)^2 = y^6 + 2y^5 + y^4$$

$$(2r-3s)^2 = 4r^2 - 12rs + 9s^2$$

$$(3\phi + 0{,}5\omega)^2 = 9\phi^2 + 3\phi\omega + 0{,}25\omega^2$$

$$(1000+20)\cdot(1000-20) = 1000^2 - 20^2 = 999600$$

$$\frac{z^2-1}{z+1} = \frac{z^2-1^2}{z+1} = \frac{(z-1)\cdot(z+1)}{(z+1)} = z-1$$

Ergänze zu einer vollständigen Binomischen Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(X + \Box)^2 = x^2 + 20x + \Box$$

Logo : $x \triangleq a$

und $2b \triangleq 20$

$$(X + \boxed{10})^2 = x^2 + 20x + \boxed{10^2}$$

$$(X - \Box)^2 = x^2 - x + \Box$$

$$\left(X + \boxed{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^2 + x + \boxed{\frac{1}{4}}$$

Die quadratische Ergänzung

$$(X + \boxed{})^2 = x^2 + px + \boxed{}$$

Logo : $x \triangleq a$

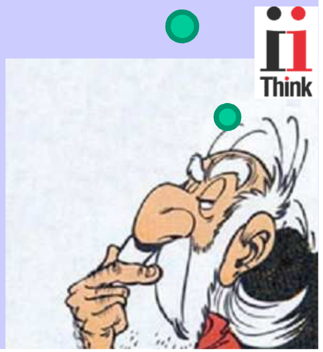
und $2b \triangleq p$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(X + \boxed{\frac{p}{2}})^2 = x^2 + 20x + \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

Diesen Summanden nennt man quadratische Ergänzung

Merke: Die quadratische Ergänzung ist immer die Hälfte des Faktors, der vor der Variablen x steht, zum Quadrat!

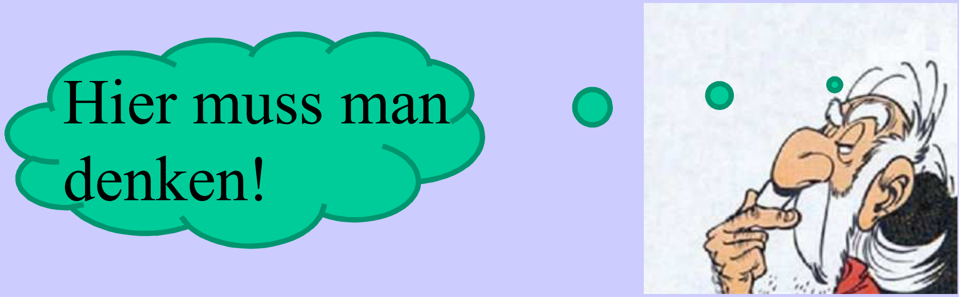


Ergänze zu einer vollständigen Binomischen Formel

$$x^2+4x+\square=(\qquad)^2 \qquad x^2+4x+2^2=(x+2)^2$$

$$x^2-\frac{1}{2}x+\square=(\qquad)^2 \qquad x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=(x+\frac{1}{4})^2$$

$$4r^2-12rs+\square=(\qquad)^2$$



$$(2r)^2-6s\cdot 2r+\square=(\qquad)^2 \qquad (2r)^2-6s\cdot 2r+\boxed{(3s)^2}=(2r-3s)^2$$

Schreibe den Term mit Hilfe einer bin. Formel um:

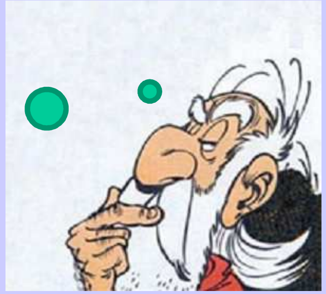
$$x^2 + 4x + 1 =$$

$$x^2 + 4x + 2^2 - 3 =$$

$$(x+2)^2 - 3$$

Hier stört die 1.Wenn da eine 4 wäre….

$$x^2 - 4x + 2^2 = (x+2)^2$$



$$x^2 - 12x - 3 = x^2 - 12x + 6^2 - 39 = (x-6)^2 - 39$$

$$r^2 + 8r - 7 = r^2 + 8r + 4^2 - 23 = (r+4)^2 - 23$$