BLK-Modellversuch

SINUS

Rheinland-Pfalz

Netzwerkschule: **Cusanus-Gymnasium**
Kurfürstenstraße 14
54516 Wittlich

Eine offene Aufgabe zum Thema „Minimale Entfernungen" im <u>Geometrieunterricht</u> der Klassenstufe 8

Autor: **StD Wolfgang Zimmer**
Kontakt: Tel. dienstlich : 06571 / 4073
Fax : 06571 / 2257
E-Mail: w.zimmer.bks@t-online.de

Diese Unterrichtseinheit habe ich bereits mehrfach in einer 8. Jahrgangsstufe und im Rahmen des BLK-Versuchs in einer 9. Jahrgangsstufe unterrichtet. In der Sekundarstufe 2 behandle ich diese Problematik oft in Vertretungsstunden und in der Klassenstufe 11 bei der Behandlung von Minimax-Aufgaben mit Hilfe der Differentialrechnung, um zu zeigen, dass es auch elegante Lösungsmethoden zu dieser Problematik außerhalb der Differentialrechnung gibt.

Der besondere Reiz dieser offenen Aufgabe besteht darin, dass sie nach meiner Beobachtung sehr motivierend ist und dass man durch Variation der Problemstellung beliebig tief in die Thematik eindringen kann .

Ohne Eisatz des Computers habe ich mich in meinen Unterrichtseinheiten auf die Lösung des Bienenproblems 1 und auf die Lösung des Bienenproblems 2 beschränkt. Dafür habe ich einschließlich der exakten Beweise etwa 4-5 Unterrichtsstunden benötigt.
Mit dem Einsatz des Computers (Wir benutzen an unserer Schule das Geometrie-Programm EUKLID) sind die Schülerinnen und Schüler sehr viel stärker motiviert weitere Bienenprobleme zu erforschen, da das aufwändige

Zeichnen entfällt. Zeichnungen sind am Bildschirm sehr schnell erstellt und lassen sich sofort ausdrucken. Durch ziehen geeigneter Punkte lassen sich die Probleme zumindest experimentell lösen. Selbst das anspruchsvolle FAGNANO-Problem ist dann bis auf den exakten Beweis keine große Hürde mehr.

Die Schülerinnen und Schülerwaren sehr kreativ wenn es darum ging neue Bienenprobleme zu finden. Dabei sind viele Fragen aufgeworfen worden, die bis heute noch nicht abschließend beantwortet sind. Aber das gehört zum Wesen offener Aufgaben.

Der Unterrichtsgang liegt als WORD-Datei vor. Die Folien bzw. Arbeitsblätter können sofort ausgedruckt und im Unterricht eingesetzt werden.
Ich wünsche Ihnen viel Spaß beim Ausprobieren.

November 2000

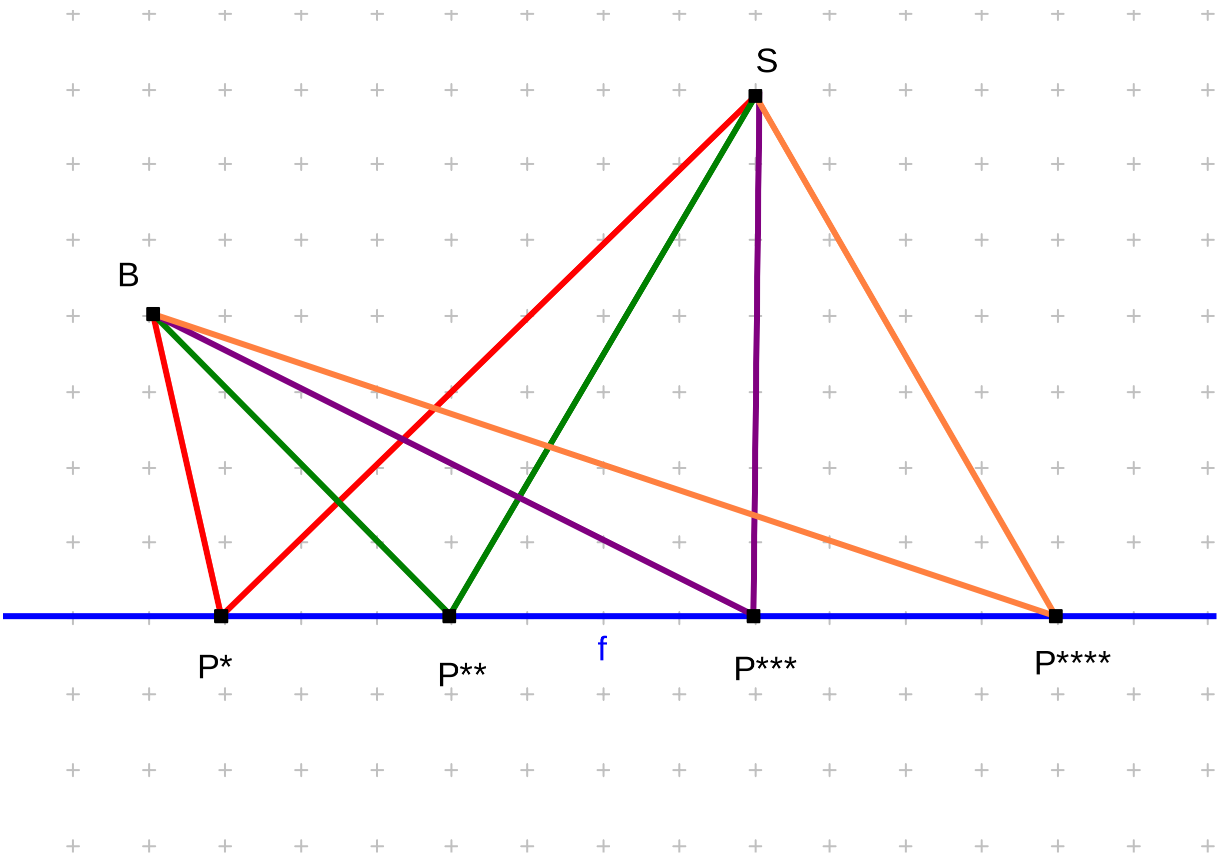
Wolfgang Zimmer

Das Bienenproblem 1 Folie 1

Eine Biene möchte zu ihrem Stock zurückfliegen. Am Fluß möchte sie noch einen Schluck Wasser nippen. Welchen Weg ums sie einschlagen, damit sie alles auf dem kürzesten Weg erledigen kann ?

Fluß

Erarbeitung der Lösung:



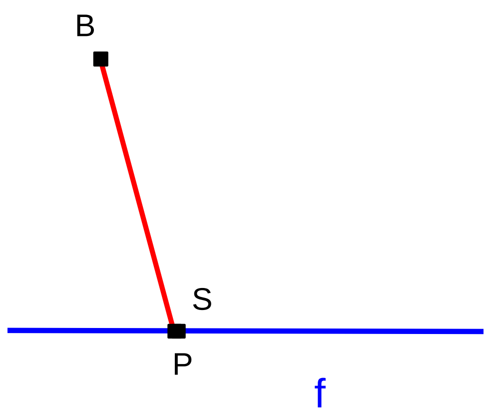
Auf ein Rechenblatt skizzieren die Schülerinnen und Schüler die Lage von Fluss, Biene und Stock. Durch Messung (bei identischen Zeichnungen) kann eine Näherungslösung gefunden werden.

Sollte die Arbeit mit dem Geometrie-Programm EUKLID eingeübt sein, so kann man durch Ziehen des Punktes P auf der Geraden f der kürzeste Weg experimentell gefunden werden.

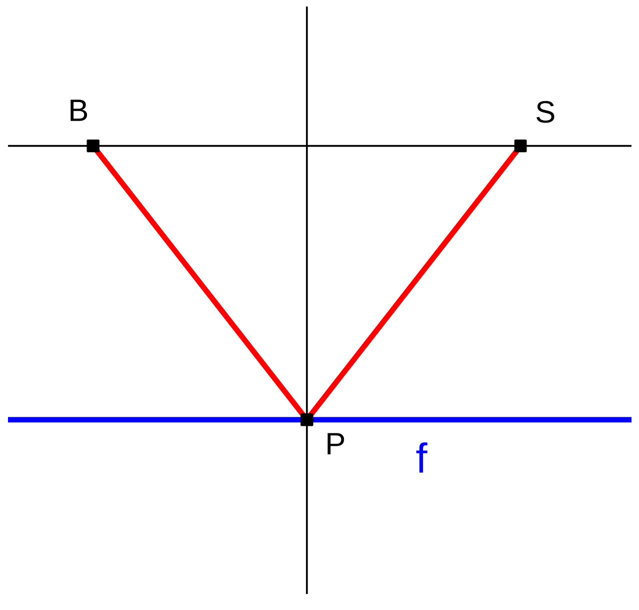
Das Programm EUKLID findet man bei **http:// www.mechling.de/**

Beigefügt ist die Datei Biene01.GEO , die mit Euklid geöffnet werden kann. In Euklid lassen sich Längen von Strecken bzw. Längen von Streckenzügen in einem eigenen Fenster darstellen.
Durch Variation der Stellung von Biene und Stock lassen sich zahlreiche Probleme erzeugen, die leicht lösbar sind, bzw. die uns auf die Lösung des Bienenproblems 1 führen:

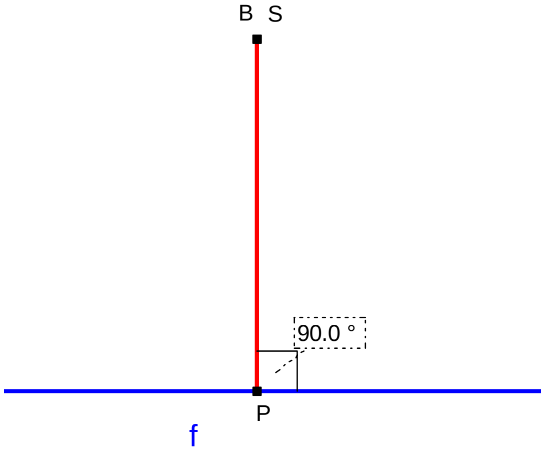
Der Bienenstock steht Direkt am Fluss



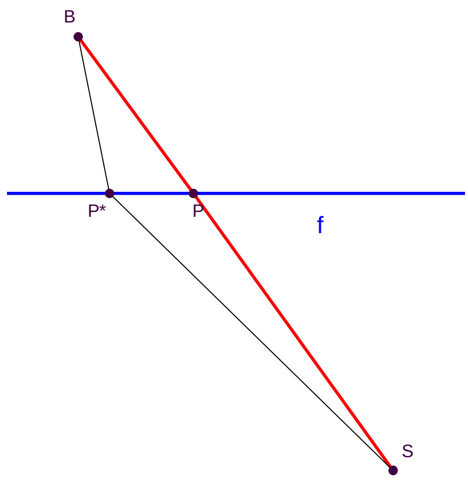
Bienenstock und Biene liegen im gleichen Abstand zum Fluss



Die Biene sitzt direkt am Bienenstock



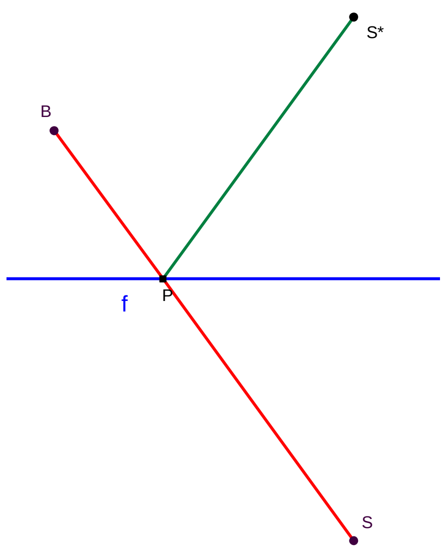
Die entscheidende Idee, um zur allgemeinen Lösung zu gelangen, ist die Verlagerung des Bienenstocks auf die andere Flussseite:



Wegen der Dreiecksungleichung ist die Strecke BS der kürzeste Weg:

$P^* \neq P \Rightarrow \left|\overline{BS}\right| < \left|\overline{BP^*}\right| + \left|\overline{P^*S}\right|$ Dreiecksungleichung

Die Suche nach einem Weg, der genau so lang ist wie der obige, bei dem aber der Stock auf der anderen Seite des Flusses liegt, bringt die entscheidende Idee:



Wenn S* und S spiegelsymmetrisch zu f liegen gilt:

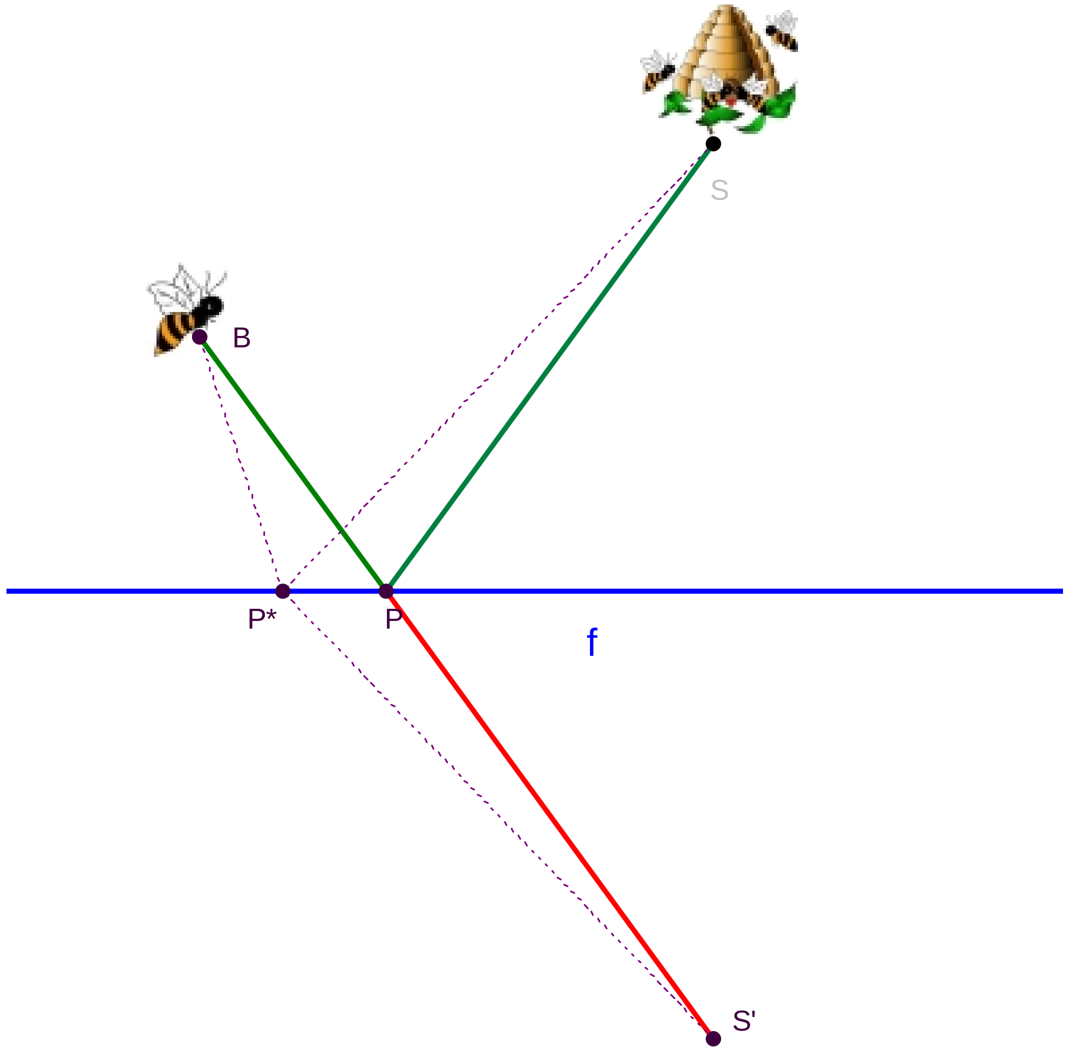
$$\left|\overline{BS}\right| = \left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{PS^*}\right|$$

Allgemeine Lösung des Bienenproblems 1 :

Der Punkt P am Fluss muss so gewählt werden, dass er auf der Verbindungsstrecke von S zum Spiegelpunkt S* von S liegt.

Das Bienenproblem 1 Folie 2

Die Lösung



Beweis:

$\left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{PS}\right| = \left|\overline{BS'}\right|$ Eigenschaft der Spiegelung

$\left|\overline{BS'}\right| < \left|\overline{BP^*}\right| + \left|\overline{P^*S'}\right|$ Falls $P^* \neq P$ Dreiecksungleichung

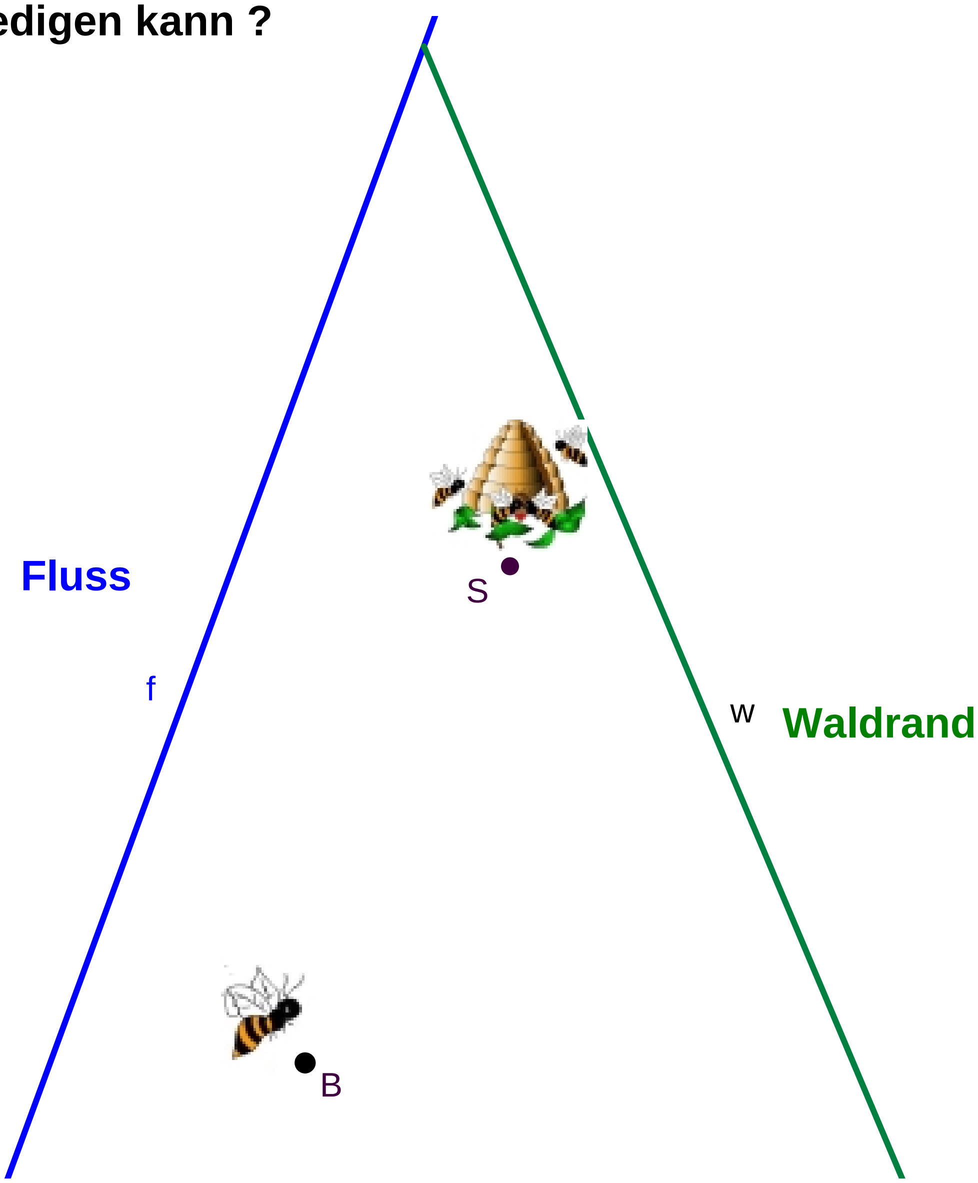
$\left|\overline{BP^*}\right| + \left|\overline{P^*S}\right| = \left|\overline{BP^*}\right| + \left|\overline{P^*S'}\right|$ Eigenschaft der Spiegelung

und damit

$\left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{PS}\right| < \left|\overline{BP^*}\right| + \left|\overline{P^*S}\right|$ Für alle $P^* \neq P$

Das Bienenproblem 2 — Folie 3

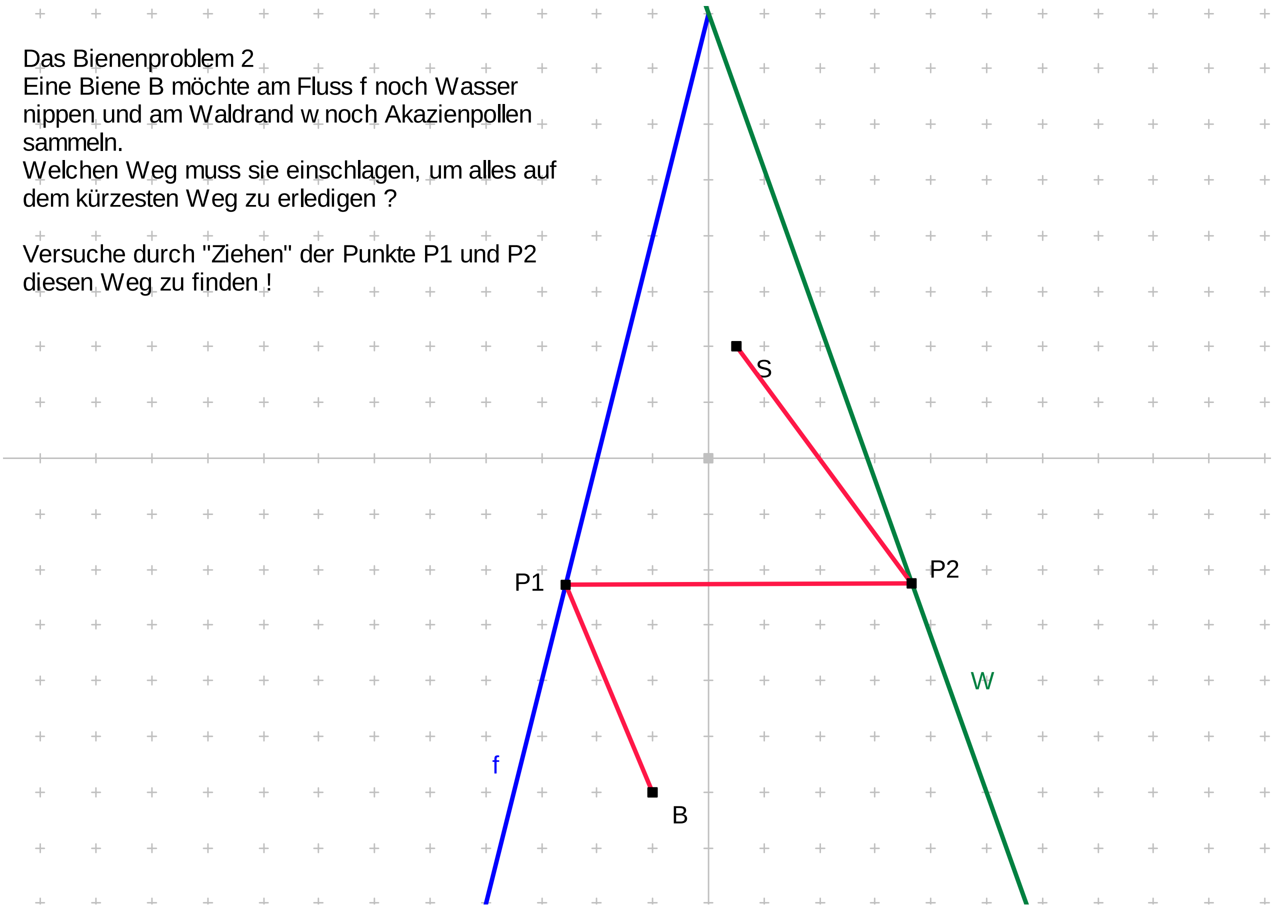
Eine Biene möchte zu ihrem Stock zurückfliegen. Am Fluss möchte sie noch einen Schluck Wasser nippen und am Waldrand noch Akazienpollen einsammeln. Welchen Weg ums sie einschlagen, damit sie alles auf dem kürzesten Weg erledigen kann ?



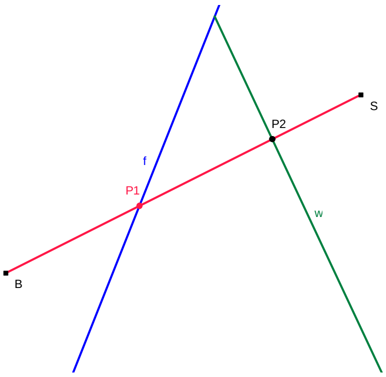
Auf einem der Folie entsprechenden Arbeitsblatt skizzieren die Schülerinnen und Schüler mögliche Lösungswege. Durch Messung und Vergleich mit den Ergebnissen der Anderen, lassen sich Näherungslösungen für den gesuchten Weg ermitteln.

Mit dem Geometrie-Programm EUKLID kann man durch Ziehen des Punktes P1 auf der Geraden f und durch Ziehen des Punktes P2 auf der Geraden w den kürzesten Weg experimentell annähern.

Beigefügt ist die Datei Biene02.GEO die mit EUKLID bearbeitet werden kann :

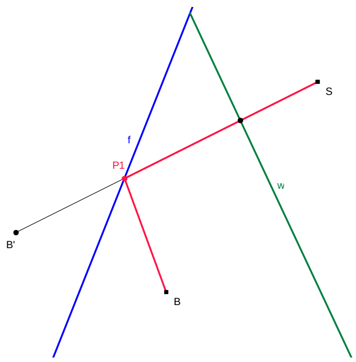


Durch Variation der Stellung von Biene, Stock, Fluss und Waldrand lassen sich zahlreiche Varianten zum Bienen-problem 2 erzeugen, von denen einige leicht lösbar sind, andere uns auf die Lösung des Ausgangsproblems führen und wieder andere völlig neue Problemstellungen ergeben:



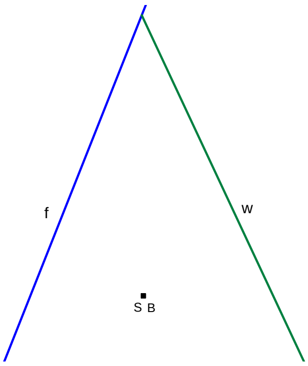
Variation 1

**Die Biene und der Stock befinden sich jenseits von Fluss und Waldrand.
Dann ist die Verbindungs-strecke $\overline{BS}$ der gesuchte kürzeste Weg.**



Variation 2

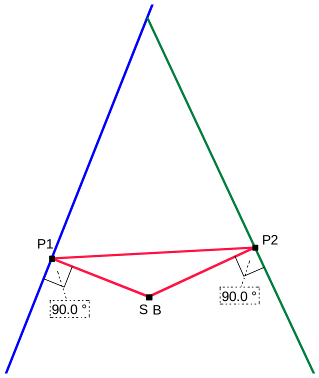
**Der Stock befindet sich im Wald, die Biene im Innenraum.
Hier müssen die Schüler und Schülerinnen erkennen, dass es sich um das Bienenproblem 1 handelt, das bereits gelöst wurde.**



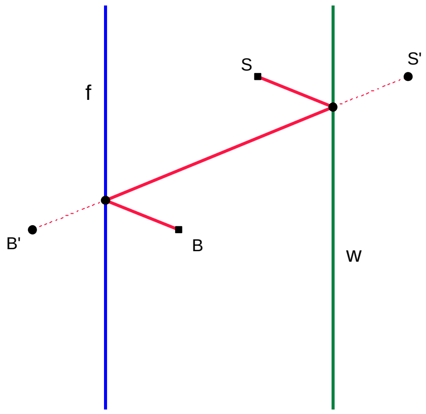
Variation 3

Die Biene startet von ihrem Stock aus.

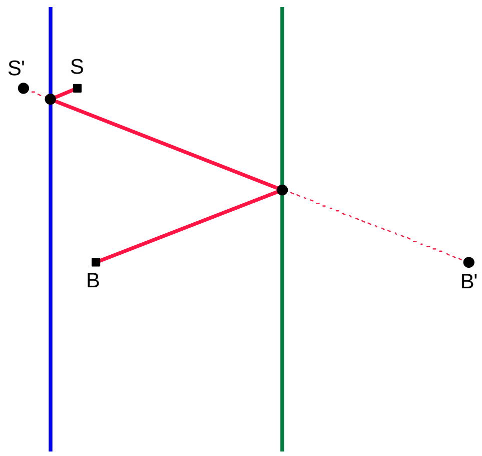
Hier lässt sich der Lösungs-weg nicht unmittelbar finden.



Viele SchülerInnen vermuten schnell eine Lösung gefunden zu haben, bei denen die Strecken $|\overline{BP1}|$ und $|\overline{P2S}|$ senkrecht auf f bzw. w stehen. Diese Lösung stellt sich jedoch als falsch heraus.



Variation 4.1
„doppeltes Bienenproblem 1"



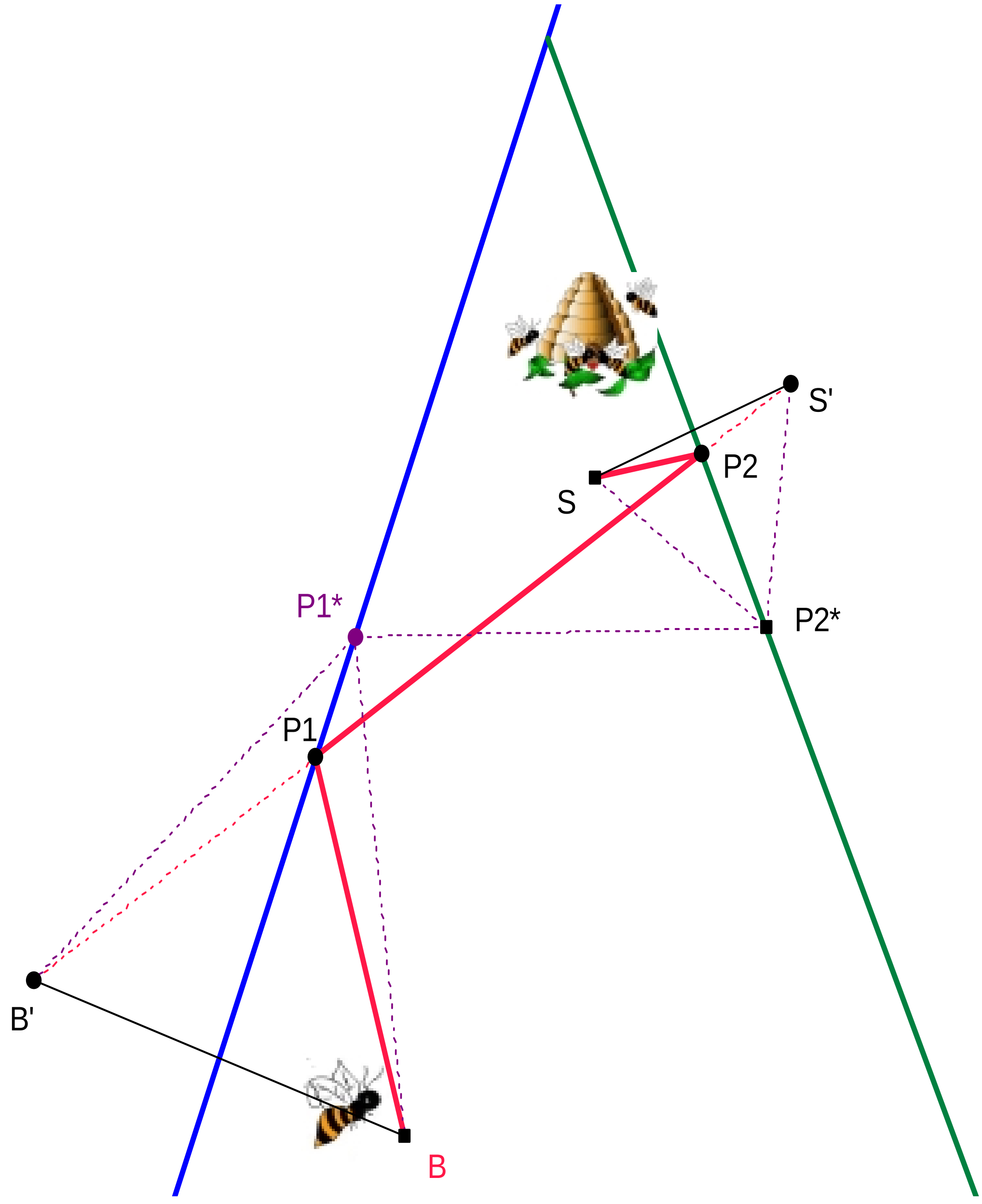
Variation 4.2
„doppeltes Bienenproblem 1"

Liegt S näher am Fluss als B, dann wird B an w gespiegelt und S an f gespiegelt

Wichtig ist an dieser Stelle, den Schülerinnen und Schülern genügend Zeit zu geben, möglichst viele Variationen selbst zu finden.
Alle Variationen werden gesammelt und diskutiert.

Das Bienenproblem 2 Folie 4

Die Lösung

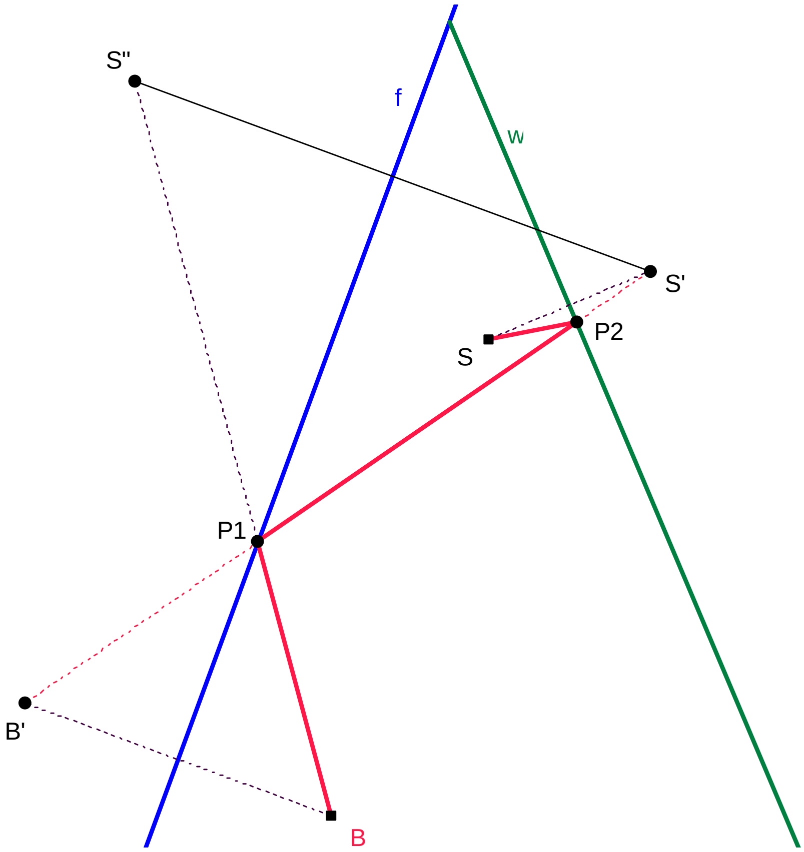


Beweis:

1) Der rote Weg ist wegen der Eigenschaften der Spiegelung genau so lang, wie die Strecke $\overline{B'S'}$

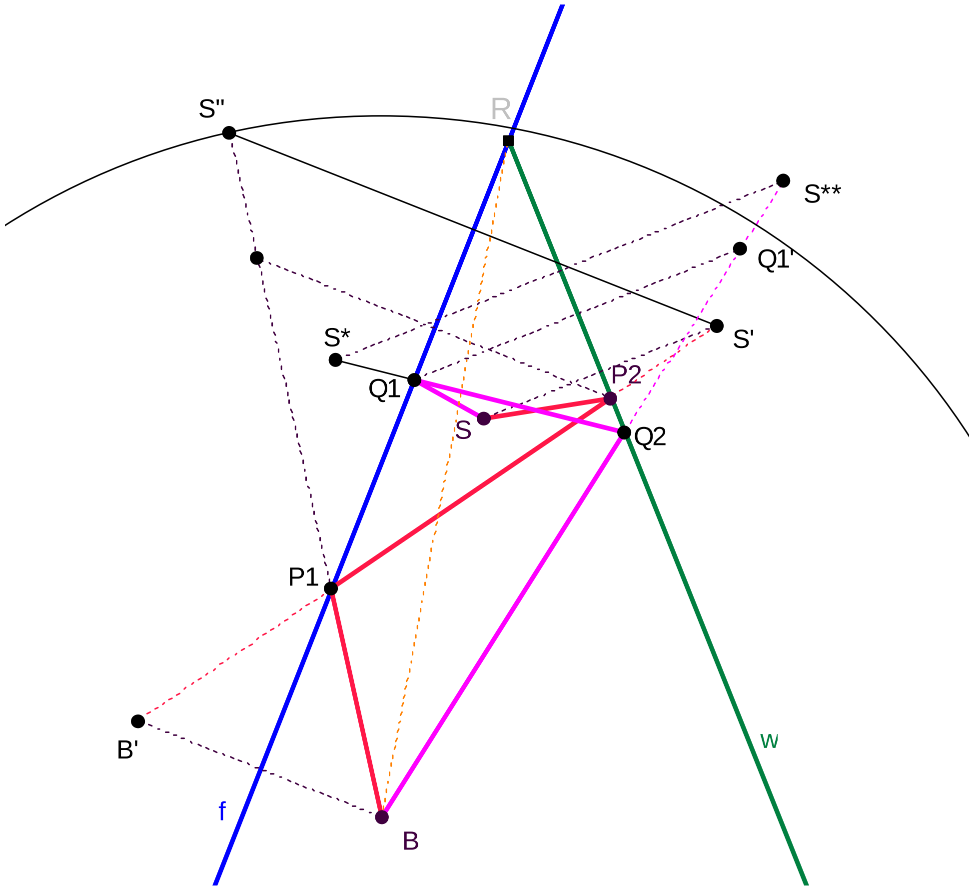
2) Wenn P1* nicht mit P1 zusammenfällt, oder P2* nicht mit P2 zusammenfällt, dann ist der Streckenzug BP1*P2*S immer länger als sie Strecke $\overline{B'S'}$ **und damit länger als der rote Weg.**

Alternativ kann man auch nur S zuerst an w und dann S' an f spiegeln. Man findet auf diese Weise den gleichen Lösungsweg:



In diesem Fall muss die Biene zuerst den Spiegelpunkt S'' ansteuern, bis sie in P1 auf den Fluss trifft. Von hier aus steuert sie dann S' an, bis sie in P2 auf den Waldrand trifft. Von P2 aus fliegt sie dann zum Stock zurück.

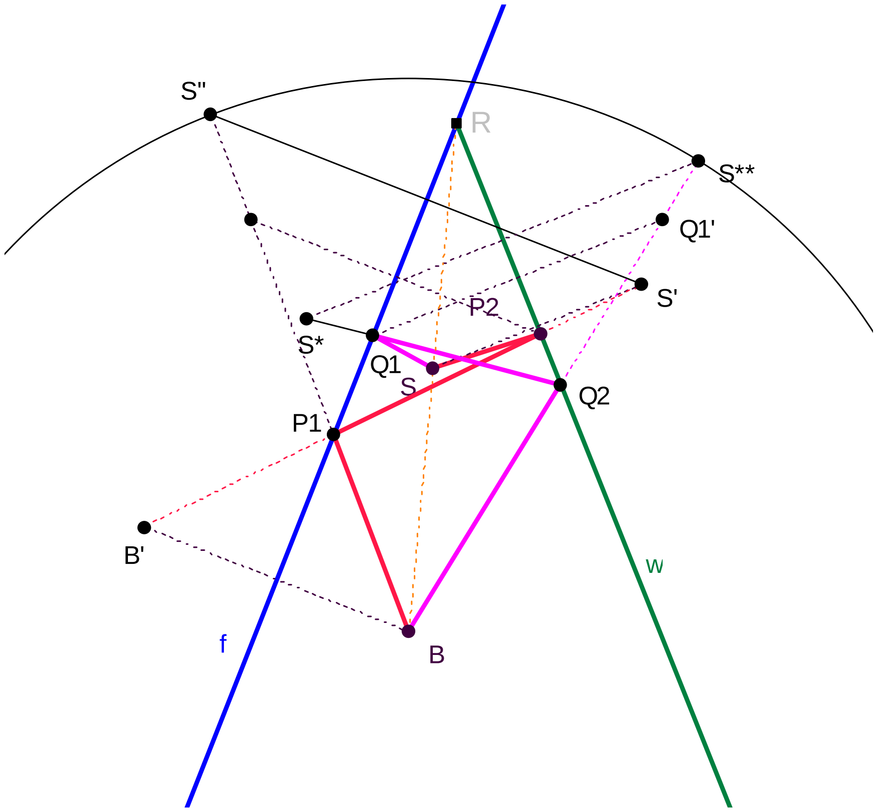
Interessant ist in diesem Zusammenhang die Frage, ob der Stock S zuerst an w und S‘ dann an f gespiegelt wird oder umgekehrt.



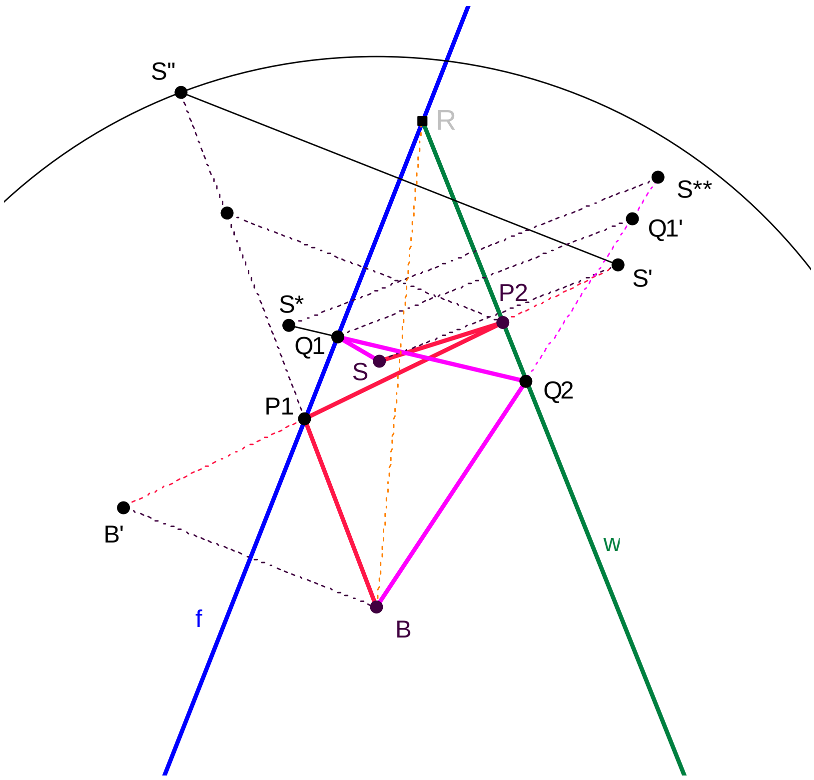
Der rote Weg BP1P2S ist genau so lang wie die Strecke B’S‘ und damit genau so lang wie die Strecke BS‘‘

Der lila Weg BQ2Q1S ist genau so lang wie die Strecke BS**
In der oben dargestellten Lage von B und S erkennt man. dass der rote Weg der kürzeste Weg ist.

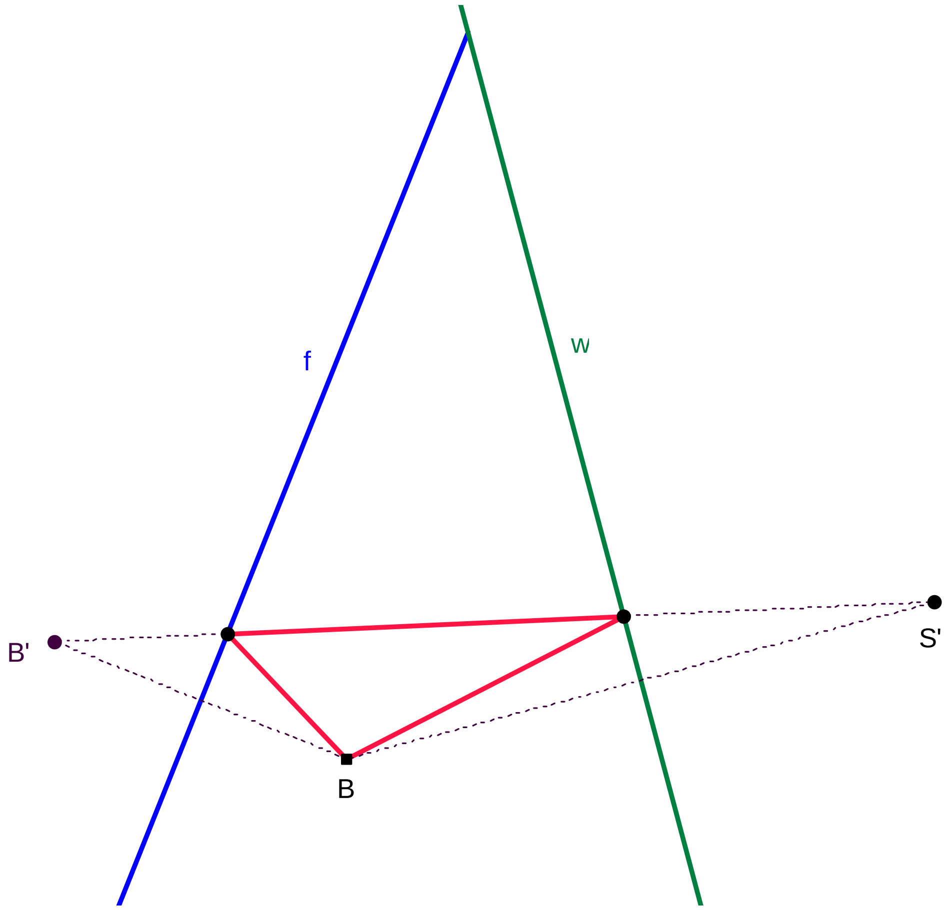
Aus Symmetriegründen folgt, dass beide Wege gleich lang sind, wenn S auf der Verbindungsgeraden RB liegt. (R ist der Schnittpunkt von f und w)



Liegt S bzgl. dieser Verbindungsgeraden näher zu f , so ist der lila Weg der kürzere Weg d.h. in diesem Fall wird S zuerst am Fluss f gespiegelt und das Bild S* dann am Waldrand w.



Die Lösung des Bienenproblems 2 für den interessanten Sonderfall, dass die Biene im Innenraum direkt am Stock losfliegt, lässt sich analog finden:



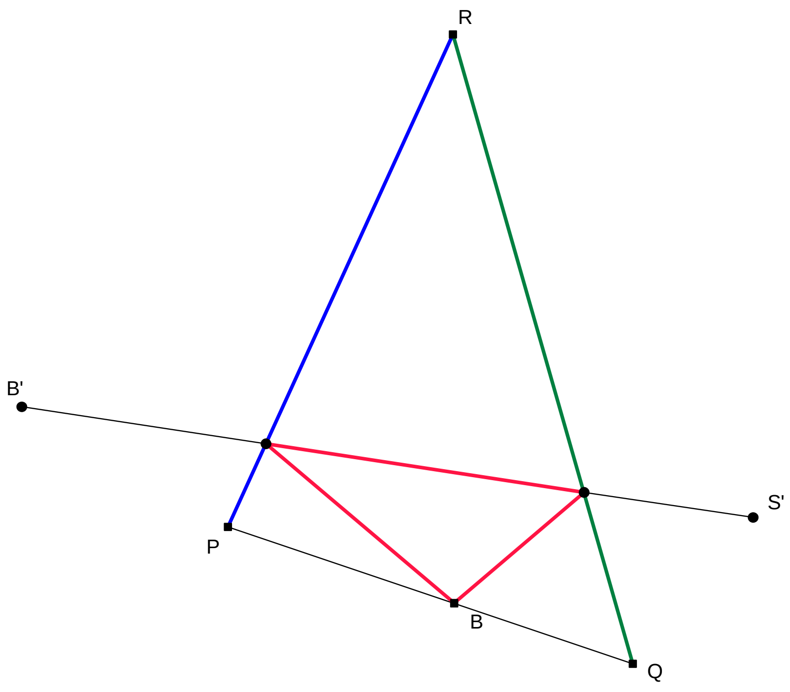
Hier ist es gleichgültig, ob man die Biene an f spiegelt und den Stock an w oder umgekehrt.
Die Lösung dieses Sonderfalls führt nun direkt zu einem bekannten mathematischen Problem, das nach dem italienischen Mathematiker Fagnano (1682-1766) benannt ist:

Das Fagnano-Problem:

In ein spitzwinkliges Dreieck ist ein Dreieck mit minimalem Umfang einzubeschreiben.

Fagnano selbst hat die Lösung des Problems gefunden, indem er mit den Mitteln der Analytischen Geometrie die Koordinaten aller vorkommenden Punkte berechnete und daraus für den Umfang des einbeschriebenen Dreiecks eine Funktion fand, deren Minimum er mit Hilfe der Differentialrechnung ermittelte.

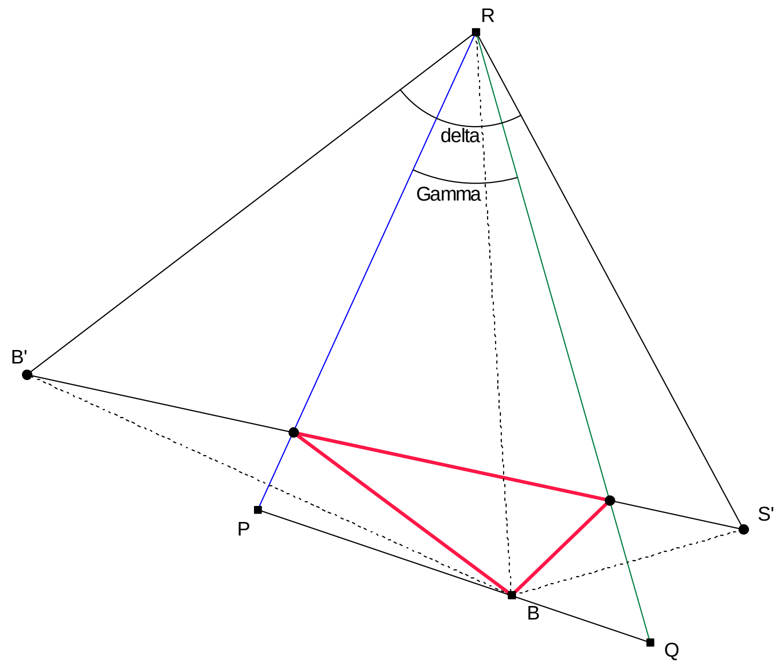
Dieses Problem stellt hier nur eine kleine Erweiterung des gerade gelösten Problems dar:



Startet die Biene im Punkt B, dann ist das rote Dreieck dasjenige mit dem kleinsten Umfang.
Jetzt ist nur noch diejenige Lage von B auf PQ zu finden, für die der rote Weg seinerseits minimal wird.

Beigefügt ist die Datei Fagnano1.GEO für das Programm EUKLID, mit dem die Lösung dieses Problems auch experimentell gesucht werden kann.

Überlegungen zur Lösung des Fagnano-Problems:



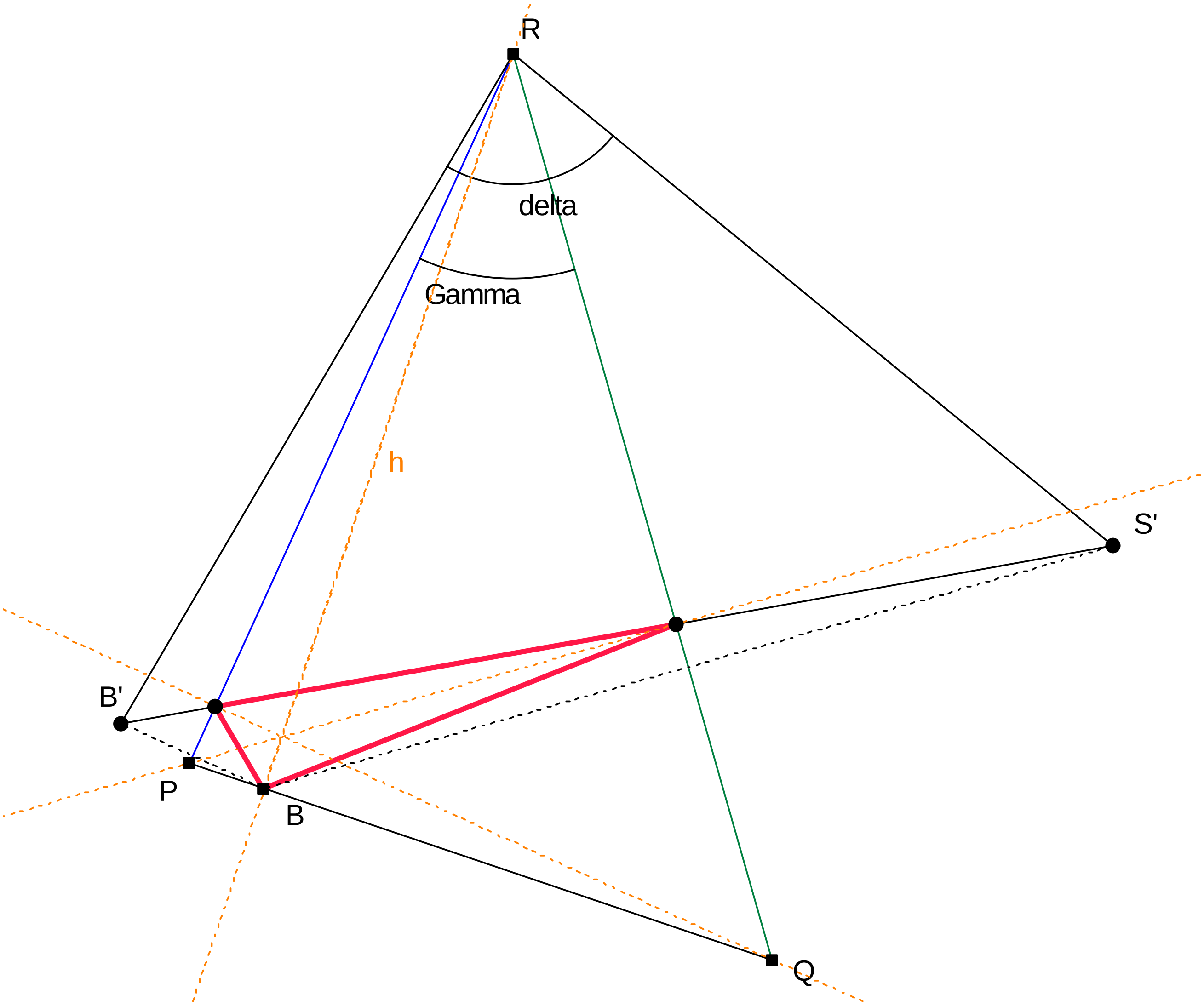
1) Aus den Eigenschaften der Spiegelung folgt, dass der Winkel Delta unabhängig von der Lage von B immer genau doppelt so groß ist, wie der Winkel Gamma des Dreiecks PQR

$$\delta = 2 \cdot \gamma$$

2) Da der rote Weg immer genau so lang ist wie die Strecke $\overline{B'S'}$ und andererseits diese Strecke gerade die Basis in dem gleichschenkligen Dreieck B'S'R mit dem festen Winkel $\delta = 2 \cdot \gamma$ ist, ist die Basis minimal, wenn die Schenkel $\overline{RS'}$ bzw. $\overline{RB'}$ minimal sind.

3) Da diese Schenkel genau so lang sind wie $\overline{RS}$, ist der rote Weg minimal, wenn $\overline{RS}$ gerade die Höhe des Dreiecks PQR ist.

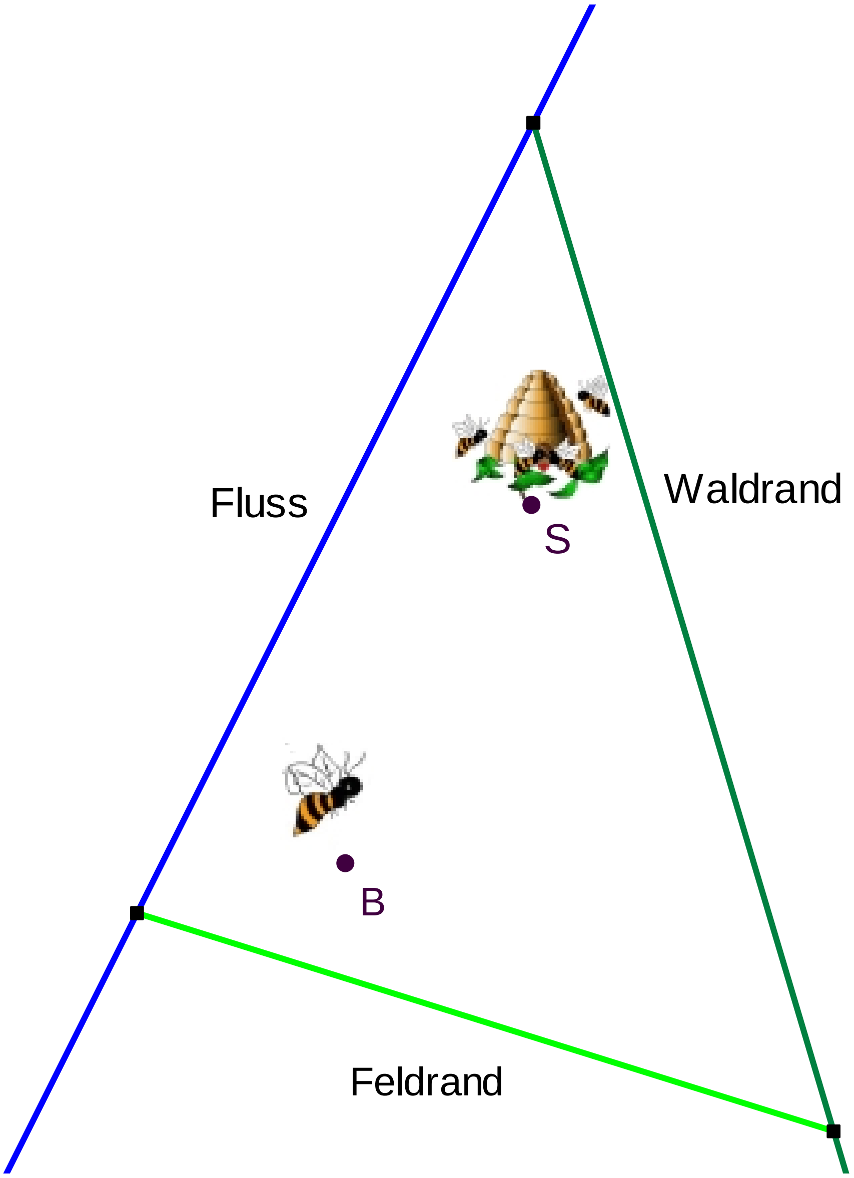
Das Höhenfußpunktdreieck ist die Lösung des Fagnano-Problems.



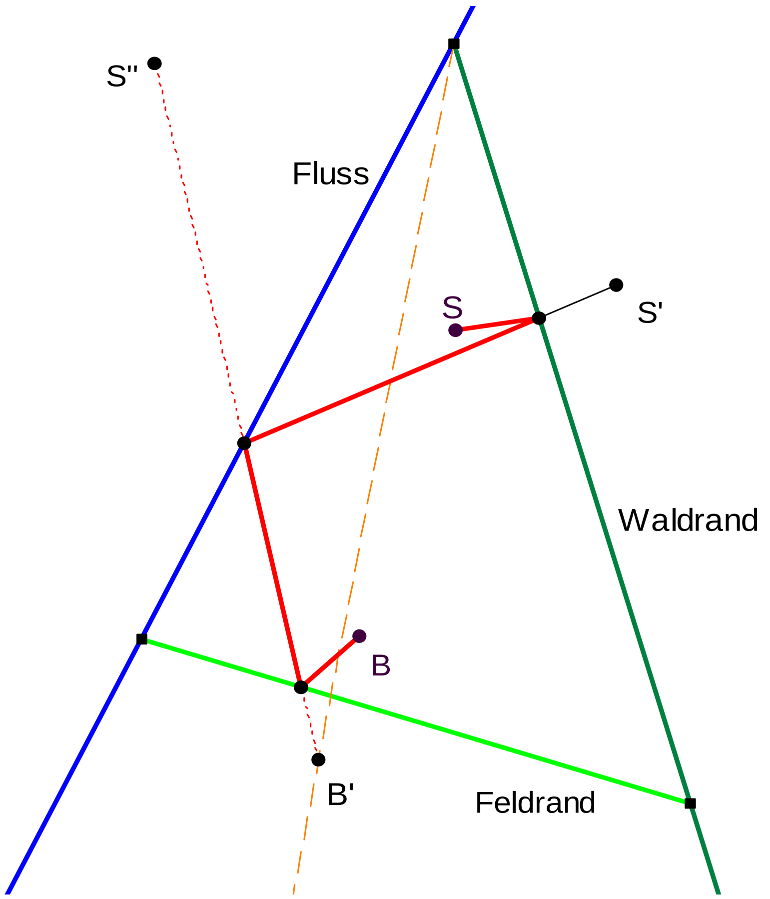
Hieran anschließend lassen sich natürlich wieder neue Bienenprobleme erzeugen:

Das Bienenproblem 3 Folie 5

Eine Biene möchte zu ihrem Stock zurückfliegen. Am Fluß möchte sie noch einen Schluck Wasser nippen ,am Waldrand noch Akazienpollen und am Feldrand noch Kleenektar einsammeln. Welchen Weg muss sie einschlagen, damit sie alles auf dem kürzesten Weg erledigen kann ?



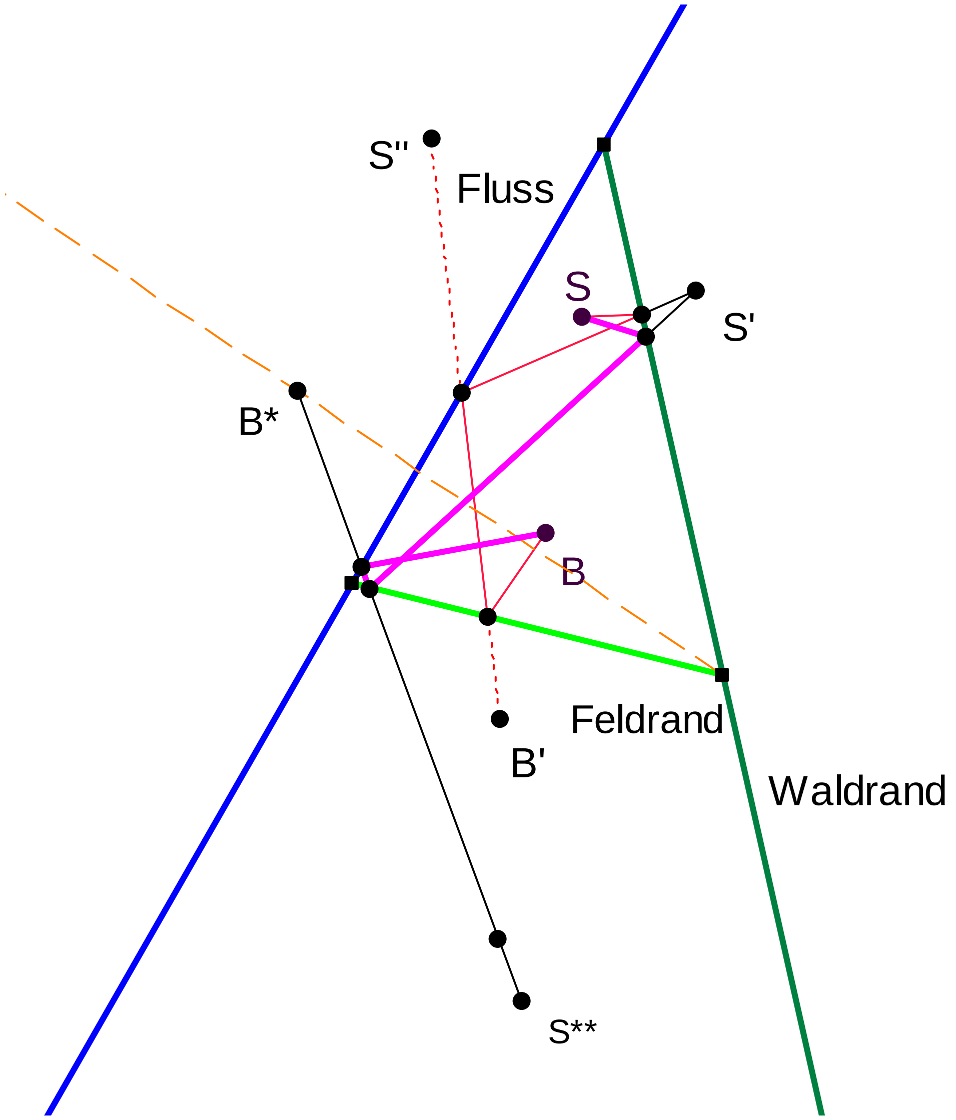
Eine kleine Variation der Stellung der Biene führt uns sofort auf das Bienenproblem 2:



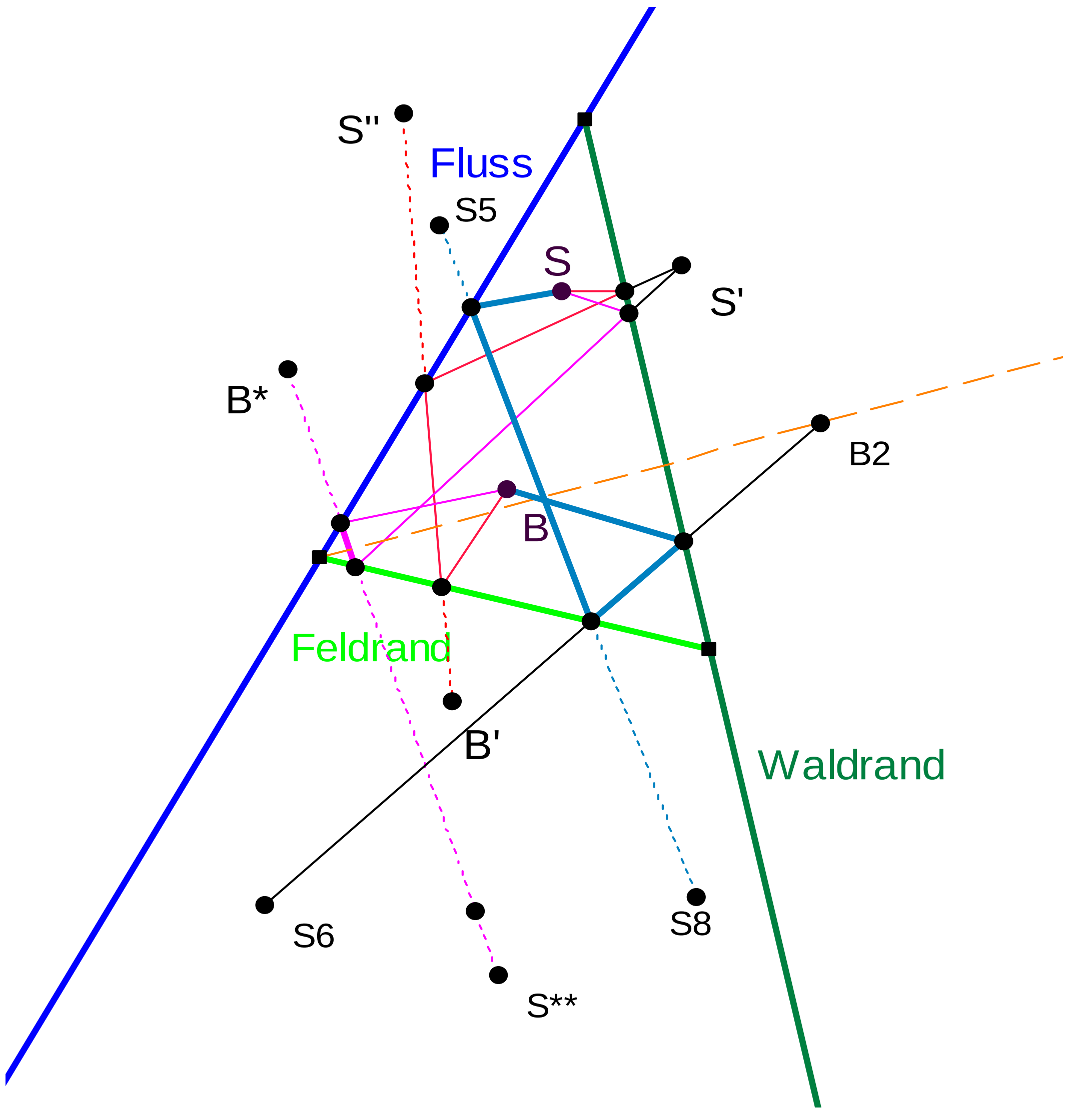
Macht man die Einschränkung, dass die Biene zuerst zum Feldrand und dann zum Fluss fliegen soll, dann ist der eingezeichnete rote Weg der kürzeste Weg.

Natürlich kann man die Biene auch in den Wald bzw. jenseits des Flusses spiegeln und dann die entsprechenden Lösungswege analog finden:

Lila Weg : Die Biene fliegt zuerst zum Fluss, dann zum Feldrand und dann zum Waldrand:



Türkiser Weg : Die Biene fliegt zuerst zum Waldrand. dann zum Feldrand und schließlich zum Fluss:

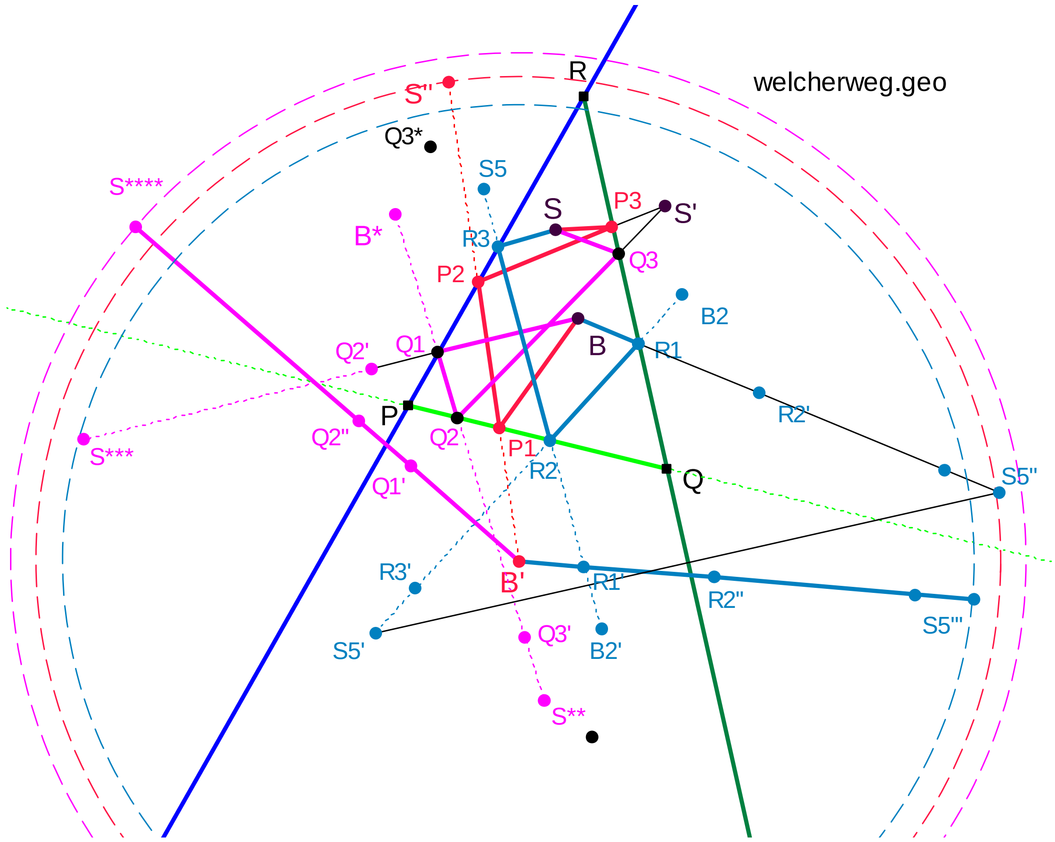


Jetzt ist nur noch zu klären, welcher der drei eingezeich-neten Wege der kürzeste Weg ist.
(Diese Überlegungen habe ich im Unterricht nicht mehr weiter verfolgt, sie sind jedoch mathematisch reizvoll)

Der rote Weg ist so lang wie die Strecke B'S"
Der lila Weg ist so lang wie die Strecke SB***
Der türkise Weg ist so lang wie die Strecke S5S8

In diesem speziellen Beispiel ist von den 3 Wegen der rote Weg der kürzeste Weg.

Zum eigenen experimentieren ist die Datei Welcher_Weg.geo für das Programm EUKLID beigefügt :



Zunächst mache man sich klar, dass
der rote Weg genau so lang ist wie die Strecke B'S"
der lila Weg genau so lang ist wie die Strecke B'S5**
der türkise Weg genau so lang ist wie die Strecke B'S****

In diesem konkreten Beispiel ist der türkise Weg der kürzeste Weg. Durch ziehen von S (bzw. von B) kann man beobachten, wie sich die Weglängen zueinander verhalten.

Weitere Bienenprobleme lassen sich leicht finden und ergeben noch ein sehr weites Betätigungsfeld.

Bienenproblem 2 mit einem Winkel zwischen Fluss und Waldrand der größer als 90° ist:

Bienenproblem 3 für nicht spitzwinklige Dreiecke.

Bienenproblem 4 für den Flug in konvexen Vierecken.

Bienenproblem n für den Flug in konvexen n-Ecken (n>2).

Räumliche Bienenprobleme für den Flug in konvexen Polyedern.

Krummlinige Flußläufe wären sicher etwas für die Oberstufe.
Ein interessanter Aspekt wäre hier die Frage nach der Form eines Wasserlaufs, bei dem es gleichgültig ist, an welcher Stelle die Biene ihr Wasser aufnimmt. D.h. der Weg ist unabhängig von der Flußform immer gleich lang. Dieser Ansatz würde uns auf die Ellipse führen.

Für weitere Anregungen und Beiträge bin ich sehr dankbar.

Wolfgang Zimmer