Primzahlgeheimnis 1

Man weiß, dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen immer mindestens eine Primzahl liegt:

Vervollständige die Quadrate und kringele alle Primzahlen ein:

1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	**101**	**122**
4	3	6	11	18	27	38	51	66			
9	8	7	12	19	28	39	52	67			
16	15	14	13	20	29	40	53	68			
25	24	23	22	21	30	41	54	69			
36	35	34	33	32	31	42	55	70			
49	48	47	46	45	44	43	56	71			
64	63	62	61	60	59	58	57	72			
81	80	79	78	77	76	75	74	73			

Fülle damit die folgende Tabelle aus:

Primzahlen		
zwischen		und
1		4
4		9
9		16
16		25
25		36
36		49
49		64
64		81
81		100
100		121
121		144

Primzahlgeheimnis 2

Satz von Tschebyscheff (1852) :

Für jede natürliche Zahl n>1 gilt :
Zwischen n und $2 \cdot n$ liegt mindestens eine Primzahl !

Tschebyscheff
(1821-1894)

Fülle damit die folgende Tabelle aus:

Primzahlen		
zwischen		und
2		4
3		6
4		8
5		10
6		12
7		14
….		….
10		20
15		30
40		80
55		110

Primzahlgeheimnis 3

Man kann jede Zahl, die keine Primzahl ist, eindeutig als Produkt mit lauter Primzahlen (Primfaktoren) schreiben. Die Primzahlen sind also die Bausteine für alle anderen Zahlen.

Man nennt dieses Verfahren Primfaktorzerlegung

Beispiel:

$1000 = 20 \cdot 50$ $= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ $= 2^3 \cdot 5^3$	$345 = 5 \cdot 69$ $= 5 \cdot 3 \cdot 23$	$704 = 64 \cdot 11$ $= 2^6 \cdot 11$

Vorsicht: Große Zahlen lassen sich nur sehr schwer in Primfaktoren zerlegen !

Aufgabe : Zerlege folgende Zahlen in Primfaktoren:

48=	120=	280=
512=	900=	2400=

Primzahlgeheimnis 4

Satz von Euklid :

Es gibt unendlich viele Primzahlen d.h. es gibt keine größte (letzte) Primzahl.

Euklid
(330-275 v.Chr.)

Der Beweis dieses Satzes ist seit der Antike weltberühmt und eigentlich für die 6. Klasse zu schwer. Wenn du aber Spaß an Mathematik hast und dich etwas konzentrierst, kannst du ihn trotzdem schon verstehen:

Ich will ihn dir zunächst an einem Beispiel klar machen :

Nehmen wir an, die Zahl 13 sei die größte (und damit letzte) Primzahl. D.h. es gibt nur die Primzahlen

2,3,5,7,11,13

Betrachen wir jetzt die Zahl

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$$

Das ist das Produkt aller Primzahlen bis zur Zahl 13 um 1 vergrößert.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten

1. Fall : 30031 ist eine Primzahl.

In diesem Fall hätten wir eine weitere Primzahl >13 gefunden.
Widerspruch zur Annahme, d.h. die Annahme dass 13 die größte Primzahl ist, ist falsch !

2. Fall: 30031 ist keine Primzahl

D.h. diese Zahl muss dann noch mindestens einen Teiler außer 1 und 30031 besitzen, denn eine Zahl die keine Primzahl (und größer als 1) ist, hat mindestens 3 Teiler.
Dieser Teiler lässt sich dann eindeutig als Produkt mit lauter Primfaktoren schreiben. (→ **Primzahlgeheimnis 3**).

Da weder 2 noch 3 noch 5 noch 7 noch 11 und 13 Teiler von 30031 sind, muss es mindestens noch eine weitere Primzahl geben, die größer als 13 ist und gleichzeitig Teiler von 30031 ist.

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass 13 die größte Primzahl ist.

D.h. in jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, dass 13 die letzte Primzahl ist. Diese Annahme ist falsch, d.h. es gibt mindestens noch eine weitere (größere) Primzahl nennen wir sie p1.

→Übrigens ist 30031 keine Primzahl, denn $30011 = 59 \cdot 509$!!
d.h. wir haben mit 59 und 509 neue größere Primzahlen gefunden !
Jetzt kannst du weiter überlegen:

Nehmen wir an, die Zahl p1 sei die größte (und damit letzte) Primzahl. D.h. es gibt nur die Primzahlen

2,3,5,7,11,13,……..,p1

Betrachen wir jetzt die Zahl

$$z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots p1 + 1$$

Das ist das Produkt <u>aller</u> Primzahlen bis zur Zahl p1 um 1 vergrößert.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten

1. Fall : z ist eine Primzahl.
In diesem Fall hätten wir eine weitere Primzahl >p1 gefunden.
Widerspruch zur Annahme, d.h. die Annahme ist falsch !

2. Fall: z ist keine Primzahl.
D.h. diese Zahl muss dann noch mindestens einen Teiler außer 1 und z besitzen, denn eine Zahl die keine Primzahl (und größer als 1) ist, hat mindestens 3 Teiler.

Dieser Teiler lässt sich dann wieder eindeutig als Produkt mit lauter Primfaktoren schreiben. (→ **Primzahlgeheimnis 3**).
Da weder 2 noch 3 noch 5 noch 7 noch 11 …….noch p1 Teiler von z sind, muss es mindestens noch eine weitere Primzahl geben, die größer als p1 ist und gleichzeitig Teiler von z ist.
Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass p1 die größte Primzahl ist.

D.h. Zu jeder Primzahl findest du immer noch eine größere !

Aufgabe:

Wenn Euklid schon das Primzahlgeheimnis 2 (Satz von Tschebyscheff) gekannt hätte, dann hätte er auch damit begründen können, dass es keine letzte Primzahl geben kann !

Schreibe auf, wie man mit der Kenntnis des Satzes von Tschebyscheff begründen kann, dass es keine letzte Primzahl geben kann:

Primzahlgeheimnis 5

Goldbachsche Vermutung 2 (aus dem Jahr 1742):

Jede gerade Zahl $z \geq 4$ lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben !

Christian Goldbach
(1690-1764)

Dieser Satz ist allgemein bis heute noch nicht bewiesen worden. Man weiß aber, dass er bis $z = 10^{14}$ stimmt !

Weißt du noch, was 10^{14} für eine Zahl ist ?

10^{14} = ______________________________________

Aufgabe: Zeige die Gültigkeit der Vermutung für folgende Zahlen:
(Verwende damit unserer Primzahltabelle)

4	=2+2
6	=3+3
8	=3+5
10	=3+7
12	=5+7
14	
16	
….	
20	
36	
50	
100	
128	
130	
150	

Primzahlgeheimnis 5

Goldbachsche Vermutung 3 (1742):

Jede ungerade Zahl größer als 5 lässt sich als Summe dreier Primzahlen schreiben !

Dieser Satz ist allgemein bis heute noch nicht bewiesen worden.

Christian Goldbach
(1690-1764)

Aufgabe: Zeige die Gültigkeit der Vermutung für folgende Zahlen:

7	=2+2+3
9	=2+2+5 =3+3+3
11	=3+3+5 =2+2+7
13	=3+5+5 =3+3+7
15	
17	
19	
21	
35	
51	
99	
101	
119	

Primzahlgeheimnis 6

Mersenne-Zahlen

Das sind Zahlen der Form $z = 2^n - 1$ mit $n \geq 2$

Mersenne hat folgende Entdeckung gemacht :

Ist n keine Primzahl, dann ist z auch keine Primzahl !

Ist n eine Primzahl, dann kann z eine Primzahl sein ! (muss aber nicht)

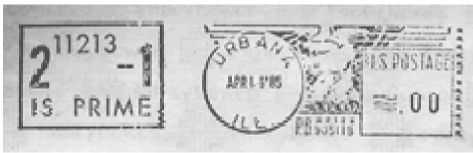
Marin Mersenne
(1588-1648)

Für die ersten Mersenne-Zahlen ist die Überprüfung, ob es sich um Primzahlen handelt, einfach:

n	$2^n - 1$	
2	3	1. Mersenne-Primzahl
3	7	2. Mersenne-Primzahl
4	15	kann keine Primzahl sein, weil 4 keine Primzahl ist
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Mersenne-Zahlen sind ideale Kandidaten für Primzahlen, da es für sie viel einfachere Überprüfungsmethoden gibt, mit denen man zeigen kann, dass es sich um Primzahlen handelt.

→ Die größten bekannten Primzahlen sind alle Mersenne-Zahlen !

Poststempel aus den USA 1968 mit der Meldung $2^{11213}-1$ ist eine Primzahl	

Den Rekord hielt bis 2001 ein amerikanische Student, der im Januar 1998 die Primzahl $2^{3021377}-1$ entdeckte. Das ist eine Zahl mit 909526 Stellen.

Im Jahr 2001 wurde mit $2^{13466917}-1$ die 39. Mersenne-Primzahl entdeckt.

Das ist eine Zahl mit 4 053 946 Stellen und Weltrekord (Stand 11.08.03).

Primzahlgeheimnis 7

Fermatsche-Zahlen

Das sind Zahlen der Form $z = 2^n + 1$ mit $n \geq 0$

Fermat hat folgende Entdeckung gemacht :

Nur wenn n selbst eine Zweierpotenz ist, kann z eine Primzahl sein.

Pierre de Fermat
1601-1665

Fermat vermutete, dass z immer eine Primzahl ist, wenn n eine Zweierpotenz ist.

Das stimmt auch für $n = 2^0$; $n = 2^1$; $n = 2^2$; $n = 2^3$ und $n = 2^4$

Für $n = 2^5$ konnte Leonard Euler im Jahr 1732 zeigen, dass $z = 2^{32} + 1 =$ 4294967297 = 641*6700417 und damit keine Primzahl ist. Die Fermatsche Vermutung war also falsch !

Diese Zerlegungen sind sehr schwer zu finden, da die Fermat-Zahlen schnell sehr groß werden. Ohne Computer lassen sich diese Zerlegungen kaum finden.

Bis heut sind außer den oben genannten Zahlen keine weiteren Fermat-Zahlen bekannt, die Primzahlen sind.

Es ist also ungeklärt, ob es noch weitere Fermatsche Primzahlen gibt.

Primzahlgeheimnis 8

Primzahlzwillinge

Primzahlzwillinge sind Paare von zwei Primzahlen zwischen denen nur eine gerade Zahl liegt.

Beispiele: (3;5) (5;7) (11;13) ………….(p;p+2)….

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Das bisher größte gefundene Zwillingspaar ist

$$(33218925 \cdot 2^{169690} - 1 \; ; \; 33218925 \cdot 2^{169690} + 1)$$

Aufgabe:

Suche aus der Primzahltabelle alle Zwillinge bis 1000 heraus.

Primzahlgeheimnis 9

Primzahldrillinge

Primzahldrillinge sind Tripel von drei Primzahlen zwischen denen jeweils nur eine gerade Zahl liegt.

Beispiel: (3;5;7)……..(p;p+2;p+4)…………….

Man kann beweisen, dass es nur einen Primzahldrilling, nämlich (3;5;7) gibt

Wie lässt sich das beweisen ?

Wenn p eine beliebige Primzahl >3 ist, dann ist eine der beiden Zahlen p+2 oder p+4 durch 3 teilbar und damit keine Primzahl.

Sei also p eine beliebige Primzahl >3

Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) p lässt bei der Division mit 3 den Rest 1 — z.B. p=13, p+2=15
Dann ist aber p+2 mit 3 teilbar und damit keine Primzahl

2.) p lässt bei der Division mit 3 den Rest 2 — z.B. p=29, p+4=33
Dann ist aber p+4 mit 3 teilbar und damit keine Primzahl

Aufgabe:

Begründe, warum es keine Primzahlvierlinge, Primzahlfünflinge…u.s.w. geben kann:

Primzahlgeheimnis 10

Fast-Primzahldrillinge

Fast-Primzahldrillinge sind Tripel die einen Primzahlzwilling enthalten und eine weitere Primzahl, zwischen der und einer Zwillingszahl höchstens 2 gerade Zahlen liegen:

Beispiel: (5;7;11) (7; 11;13)……..(p;p+2;p+4)…(p;p+4;p+6)..

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Fast-Primzahldrillinge gibt.

Aufgabe:

Bestimme alle Fast-Primzahldrillinge bis 100 :

(5;7;11) (7; 11;13)

Fast-Primzahlvierlinge

Fast-Primzahlvierlinge sind Viertupel die zwei Primzahlzwillinge enthalten zwischen denen höchstens 2 gerade Zahlen liegen:

Beispiel: (5;7;11;13) (5;7;11;13)……..(p;p+2;p+6;p+8)…...

Es konnte bis heute nicht bewiesen werden, ob es unendlich viele Fast-Primzahlvierlinge gibt.

Bestimme alle Fast-Primzahlvierlinge bis 120 :