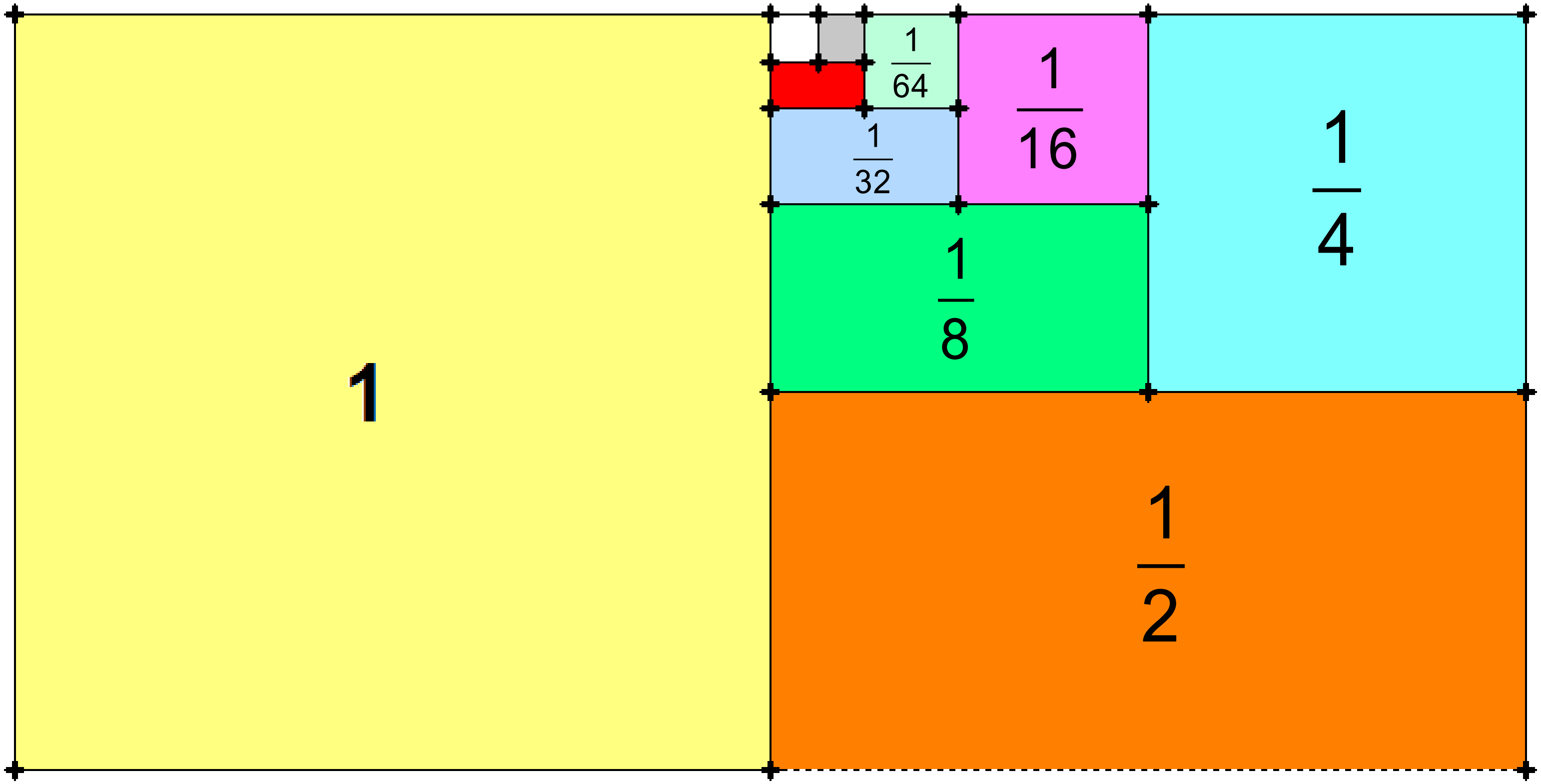
Eine spannende Folge



$$\left(a_n\right): \quad a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{4};\ a_3 = \frac{1}{8};\ a_4 = \frac{1}{16};\ldots\ldots a_{100} = \frac{1}{2^{100}};\ldots a_n = \frac{1}{2^n}$$

Die Folge (an) ist streng monoton fallend

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Klar ich muss zeigen

$$a_n > a_{n+1}$$

für alle n

Beweis:

$$\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} \quad \Big| \cdot 2^{n+1}$$

$$\frac{2^{n+1}}{2^n} > 1$$

$$2 > 1 \quad \checkmark$$

Alle Folgenglieder sind größer als 0

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Klar ich muss zeigen

$$a_n > 0$$

für alle n

Beweis:

$$\frac{1}{2^n} > 0 \;\Big|\; \cdot 2^n$$

$$1 > 0 \;\checkmark$$

Aber nicht alle Folgenglieder sind größer als 0,0001

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Klar ich muss zeigen

$$a_n > 0{,}001$$

gilt nicht für alle n

Beweis:

$$\frac{1}{2^n} > 0{,}001 \quad \Big| \cdot 2^n$$

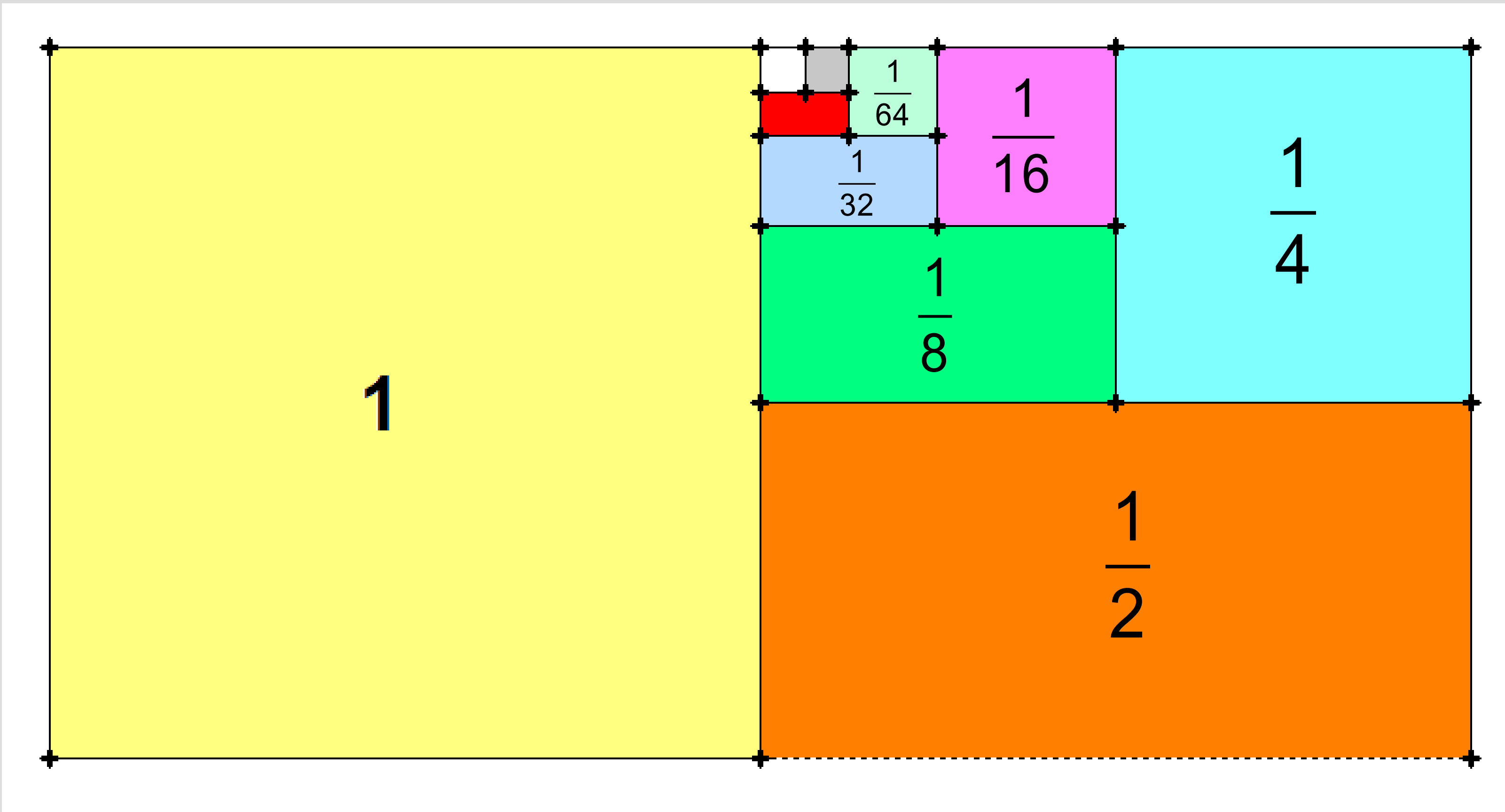
$$1 > 0{,}001 \cdot 2^n \quad \Big| : 0{,}001$$

$$1000 > 2^n$$ *Falsch!*

Denn für n>=10
Stimmt diese Aussage
nicht!

$2^{10} = 1024$ $2^{11} = 2048$ .....

Eine spannende Folge



$$(s_n):\quad s_1 = 1;\ s_2 = \frac{3}{2};\ s_3 = \frac{7}{4};\ s_4 = \frac{15}{8};\ s_5 = \frac{31}{16}\ldots .s_{100} = \frac{2^{100}-1}{2^{99}}\ldots \qquad s_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

Die Folge (s_n) ist streng monoton steigend

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \qquad s_{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

Klar ich muss zeigen

$$s_{n+1} > s_n$$

für alle n

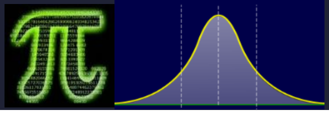
Beweis:

$$\frac{2^{n+1} - 1}{2^n} > \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \quad \Big| \cdot 2^n$$

$$2^{n+1} - 1 > \left(2^n - 1\right) \cdot 2$$

$$2^{n+1} - 1 > 2^{n+1} - 2 \quad \Big| - 2^{n+1}$$

$$-1 > -2 \quad \checkmark$$



Welche Folgenglieder sind < 1,999

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

Probe:

$$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}} < 1{,}999 \quad \Big| \cdot 2^{n-1}$$

$$2^n - 1 < 1{,}999 \cdot \frac{2^n}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$2 \cdot 2^n - 2 < 1{,}999 \cdot 2^n \quad \Big| -1{,}999 \cdot 2^n$$

$$0{,}001 \cdot 2^n - 2 < 0 \ | +2$$

$$0{,}001 \cdot 2^n < 2 \ |: 0{,}001$$

$$2^n < 2000$$

$$n < 10 \quad \checkmark$$

Klar ich muss zeigen

$$s_n < 1{,}999$$

Für welche n ?

$$s_9 = \frac{2^9 - 1}{2^{9-1}} \approx 1{,}9961 < 1{,}999$$

$$s_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2^{10-1}} \approx 2{,}002$$

Die Folgenglieder $s_1, s_2, \ldots, s_9$ sind kleiner als 1,999, alle anderen sind größer!

Der Grenzwert einer Folge

Klar, ab einem bestimmten Folgenindex k müssen alle Folgenglieder mit einem größeren Index in einer beliebig kleinen Umgebung von g liegen.

Eine Folge (a_n) hat den Grenzwert g , wenn du einen Folgenindex k angeben kannst, ab dem alle nachfolgenden Folgenglieder in dem Streifen $\left[g-\varepsilon; g+\varepsilon\right]$ liegen. Dabei ist ε eine beliebig kleine positive Zahl.

Die Folge a_n hat den Grenzwert 0

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_k < 0 + \varepsilon$$

$$\frac{1}{k} < \varepsilon \quad | \cdot n$$

$$1 < \varepsilon \cdot k \; | : \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < k$$

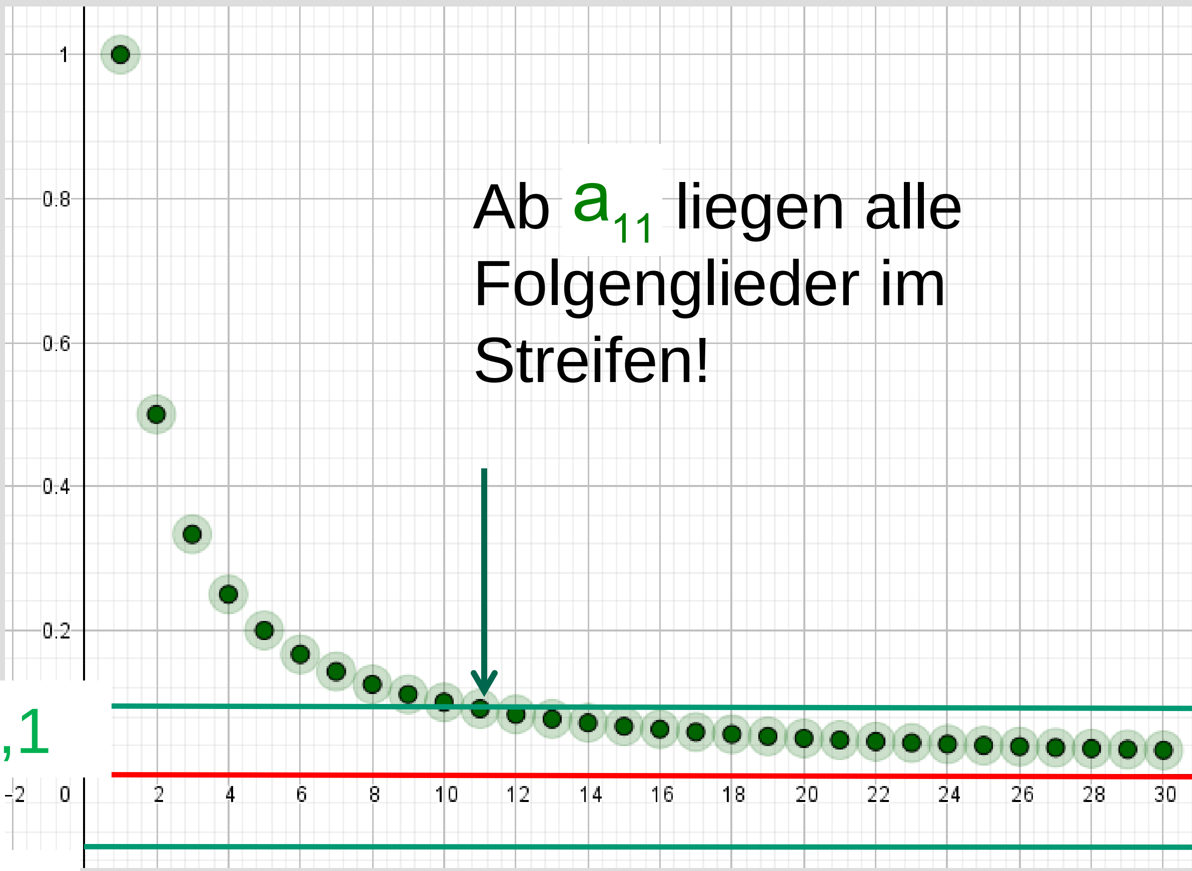
Wenn ich also k so wähle, dass $k > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt, dann liegen alle Folgenglieder mit einem Index größer als k in der $\varepsilon-$Umgebung von 0

Die Folge a_n hat den Grenzwert 0

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_k < 0 + 0{,}1$$

$$\varepsilon = 0{,}1$$



Ab a_{11} liegen alle Folgenglieder im Streifen!

0+ 0,1

0

0- 0,1

Die Folge a_n hat den Grenzwert 0

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$k > \frac{1}{\varepsilon}$$

beliebig kleine ε

$\varepsilon = 0{,}1$ — also $k > 10$

$\varepsilon = \frac{1}{321956}$ — also $k > 321956$

$\varepsilon = 0{,}000015$ — also $k > 66667$

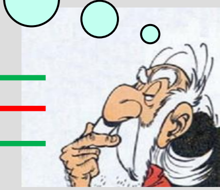
$\varepsilon = 0{,}000001$ — also $k > 1000000$

Bei einem vorgegebenen ε muss ich mein k so wählen, dass alle Folgenglieder mit einem Index größer als k in dem Streifen $[0-\varepsilon;0+\varepsilon]$ liegen

Grenzwerte

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

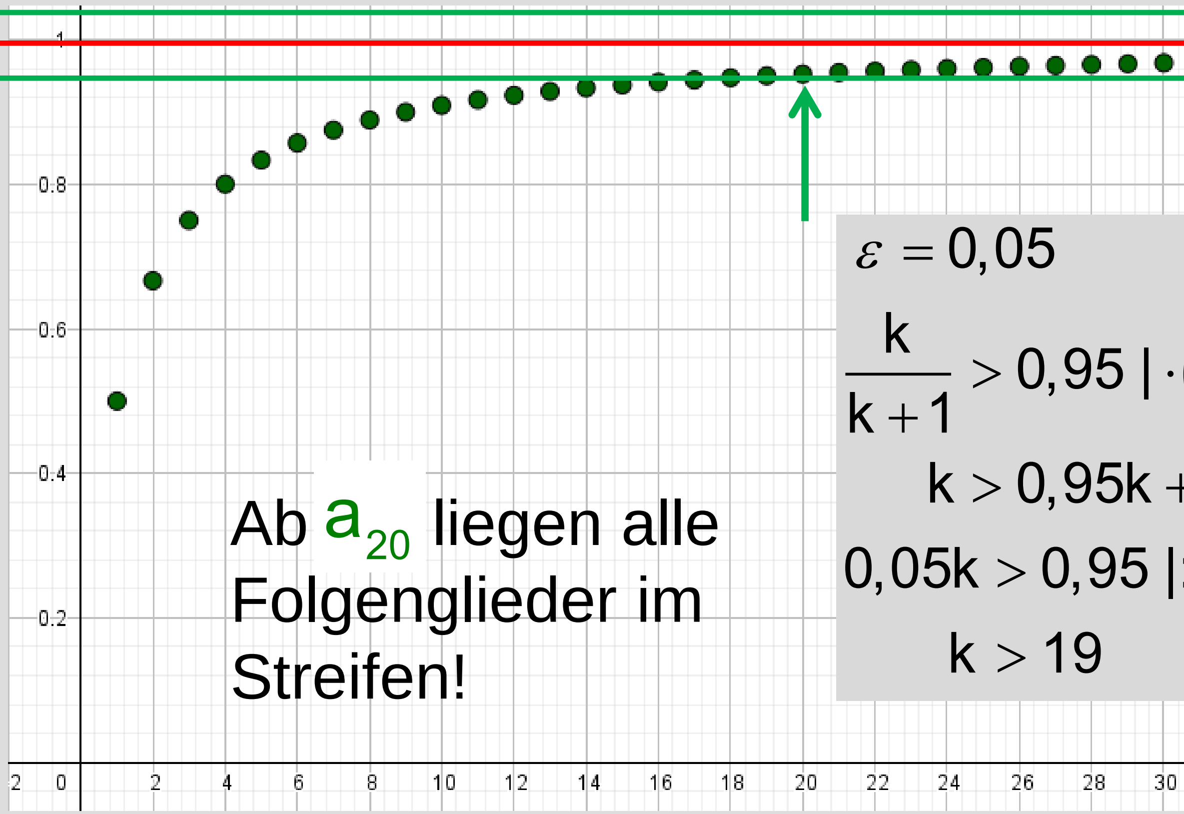


$\varepsilon = 0{,}05$

1,05

1

0,95



Ab a_{20} liegen alle Folgenglieder im Streifen!

$$\varepsilon = 0{,}05$$

$$\frac{k}{k+1} > 0{,}95 \mid \cdot (k+1)$$

$$k > 0{,}95k + 0{,}95 \mid -0{,}95k$$

$$0{,}05k > 0{,}95 \mid : 0{,}05$$

$$k > 19$$

Grenzwerte allgemeiner Beweis (nicht für GK)

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{Zeige: } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\frac{k}{k+1} > 1-\varepsilon \quad | \cdot k+1$$

$$k > (1-\varepsilon)\cdot(k+1)$$

$$k > k+1-\varepsilon k-\varepsilon \quad | -k$$

$$0 > \quad 1-\varepsilon k-\varepsilon \quad | +\varepsilon k$$

$$\varepsilon k > 1-\varepsilon \quad |: \varepsilon$$

$$k > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = 0{,}001$$

also $k > 999$

$$a_{1000} = \frac{1000}{1001} \approx 0{,}999001$$

$$\varepsilon = 0{,}000015$$

also $k > 66666$

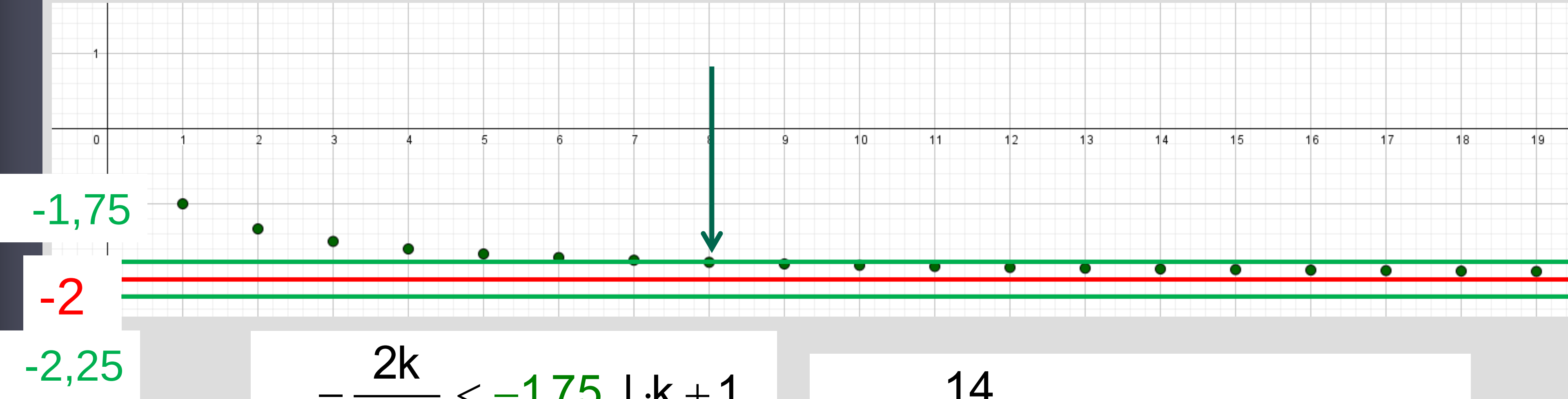
$$a_{66667} = \frac{66667}{66668} \approx 0{,}999985$$

Hausaufgabe 28.11. S79 A4 b/d

$$a_n = -\frac{2n}{n+1}$$

$$\varepsilon = 0{,}25$$

$$\text{Zeige: } \lim_{n\to\infty} -\frac{2n}{n+1} = -2$$



$$-\frac{2k}{k+1} < -1{,}75 \quad | \cdot k+1$$

$$-2k < -1{,}75k - 1{,}75$$

$$-0{,}25k < -1{,}75 \quad | \cdot (-1)$$

$$0{,}25k > 1{,}75 \quad |: 0{,}25$$

$$k > 7$$

$$a_7 = -\frac{14}{8} = -1{,}75 < -1{,}75 \text{ falsch}$$

$$a_8 = -\frac{16}{9} \approx -1{,}778 < -1{,}75 \quad \checkmark$$

Hausaufgabe 28.11. S79 A4 b/d

$$a_n = -\frac{2n}{n+1}$$

$$\varepsilon = 0{,}0001$$

Zeige : $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{2n}{n+1} = -2$

$$-\frac{2k}{k+1} < -1{,}9999 \quad | \cdot k+1$$

$$-2k < -1{,}9999k - 1{,}9999$$

$$-0{,}0001k < -1{,}9999 \quad | \cdot (-1)$$

$$0{,}0001k > 1{,}9999 \quad |: 0{,}0001$$

$$k > 19999$$

$$a_{19999} = -\frac{39998}{20000} = -1{,}9999 < -1{,}9999 \text{ falsch}$$

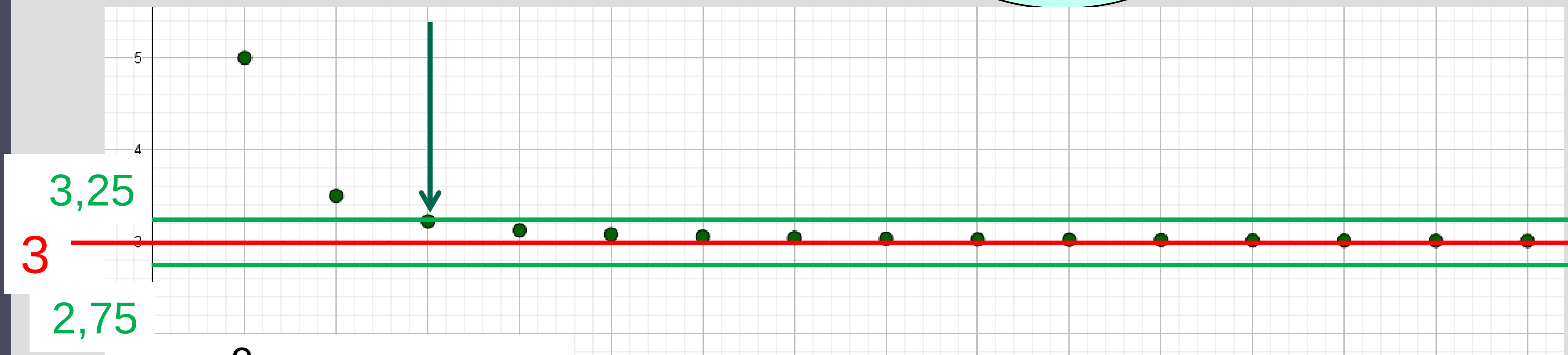
$$a_{20000} = -\frac{40000}{20001} = -1{,}999900005 < -1{,}9999$$

Hausaufgabe 28.11. S79 A4 b/d

$$a_n = 3 + \frac{2}{n^2}$$

$$\varepsilon = 0,25$$

Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \frac{2}{n^2} = 3$



$$3 + \frac{2}{k^2} < 3,25 \quad | -3$$

$$\frac{2}{k^2} < 0,25 \quad | \cdot k^2$$

$$2 < 0,25 \cdot k^2 \quad |: 0,25$$

$$8 < k^2 \quad | \sqrt{}$$

$$2,8\ldots < k \quad \text{also } k \geq 3$$

$$a_2 = 3 + \frac{2}{2^2} = 3,5 > 3,25$$

$$a_3 = 3 + \frac{2}{2^3} = 3,25$$

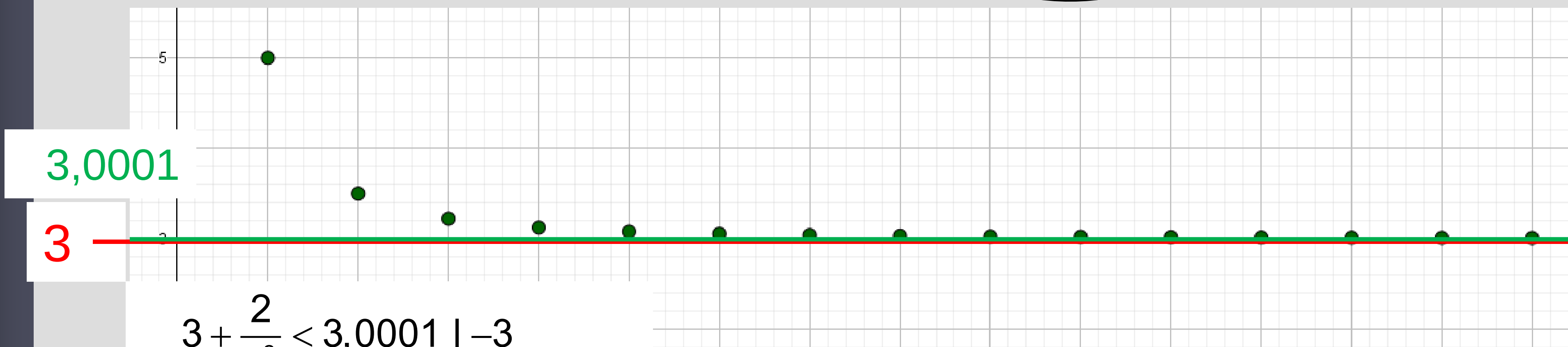
$$a_4 = 3 + \frac{2}{2^4} = 3,125 \checkmark$$

Hausaufgabe 28.11. S79 A4 b/d

$$a_n = 3 + \frac{2}{n^2}$$

$$\varepsilon = 0{,}0001$$

$$\text{Zeige: } \lim_{n\to\infty} 3 + \frac{2}{n^2} = 3$$



$$3 + \frac{2}{k^2} < 3{,}0001 \quad | -3$$

$$\frac{2}{k^2} < 0{,}0001 \quad | \cdot k^2$$

$$2 < 0{,}0001 \cdot k^2 \quad |: 0{,}0001$$

$$20000 < k^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$141{,}4\ldots < k \quad \text{also } k \geq 142$$

$$a_{141} = 3 + \frac{2}{141^2} \approx 3{,}0001006 < 3{,}0001 \ \text{falsch}$$

$$a_{142} = 3 + \frac{2}{142^2} \approx 3{,}000099 < 3{,}0001$$

Grenzwerte

$$a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\varepsilon = 0{,}005$$

Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0{,}995 \quad | -0{,}995$$

$$0{,}005 - \frac{1}{2^n} > 0 \quad | + \frac{1}{2^n}$$

$$0{,}005 > \frac{1}{2^n} \quad | \cdot 2^n$$

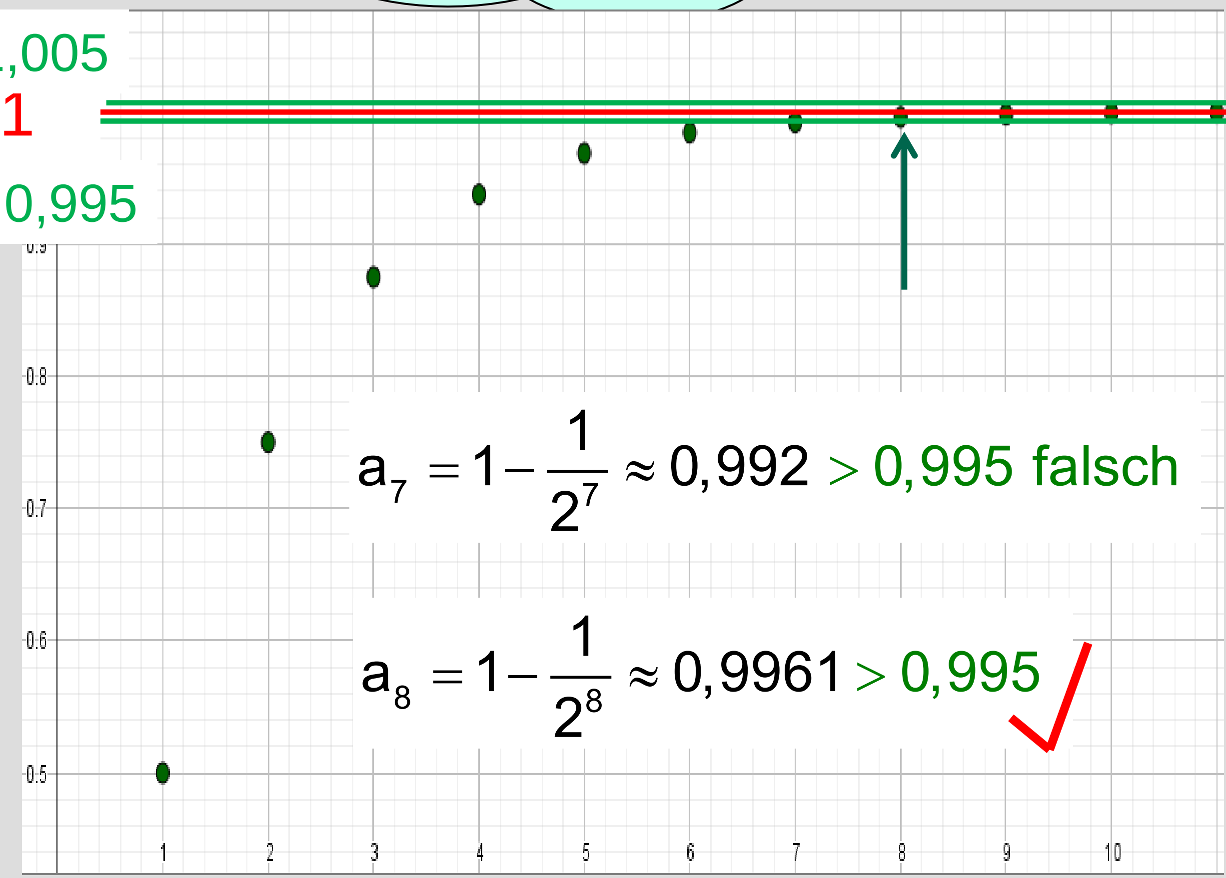
$$0{,}005 \cdot 2^n > 1 \quad |: 0{,}005$$

$$2^n > 200 \quad | \log$$

$$n \cdot \log 2 > \log 200 \quad |: \log 2$$

$$n > \frac{\log 200}{\log 2} \approx 7{,}6$$

also $n \geq 8$



$$a_7 = 1 - \frac{1}{2^7} \approx 0{,}992 > 0{,}995 \text{ falsch}$$

$$a_8 = 1 - \frac{1}{2^8} \approx 0{,}9961 > 0{,}995 \checkmark$$