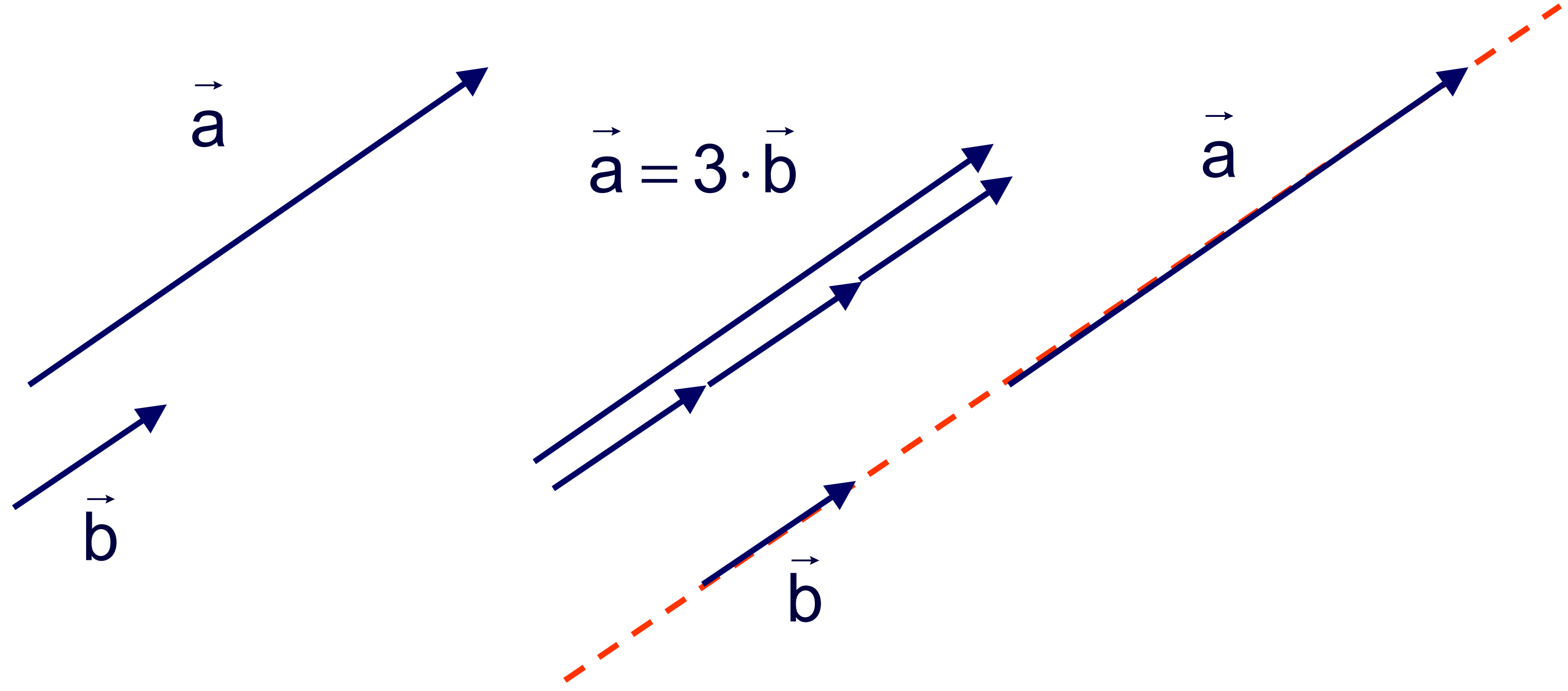
Lineare Abhängigkeit

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen linear abhängig, wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist. „Sie lassen sich auf eine Linie legen“



Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren allgemein:

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{a}, \vec{b} \in V$$

Bem.: $k = 0$ erlaubt d.h. $\vec{0}, \vec{b}$ sind linear abh.

$$\Leftrightarrow \vec{a} - k \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0} \quad \text{mit } \lambda = 1 \text{ und } \mu = -k$$

Def.: Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ heißen linear abhängig

genau dann, wenn die Vektorgleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$ eine nichttriviale Lösung bestitzt d.h. wenn entweder $\lambda \neq 0$ oder $\mu \neq 0$ ist.

Lineare Abhängigkeit von n Vektoren allgemein:

Def.: Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots \overrightarrow{a_n} \in V$ heißen linear abhängig

genau dann, wenn die Vektorgleichung

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + k_3\overrightarrow{a_3} + \ldots + k_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$$

eine nichttriviale Lösung bestitzt d.h. wenn mindestens

ein $k_i \neq 0$ ist für $i = 1, \ldots, n$

Lineare Unabhängigkeit von n Vektoren allgemein:

Def.:

Die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3} .... \vec{a_n} \in V$ heißen linear abhängig

genau dann, wenn die Vektorgleichung

$$k_1\vec{a_1} + k_2\vec{a_2} + k_3\vec{a_3} + ... + k_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung bestitzt d.h. dass diese Gleichung nur erfüllbar ist, wenn

alle $k_i \neq 0$ sind für $i = 1,...,n$

Lineare Abhängigkeit von 3 Vektoren allgemein:

Def.: Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \in V$ heißen

linear abhängig

genau dann, wenn die Vektorgleichung

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + k_3\overrightarrow{a_3} = \vec{0}$$

nichttrivial lösbar ist. (o.B.d.A. $k_1 \neq 0$)

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + k_3\overrightarrow{a_3} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_1\overrightarrow{a_1} = -k_2\overrightarrow{a_2} - k_3\overrightarrow{a_3}$$

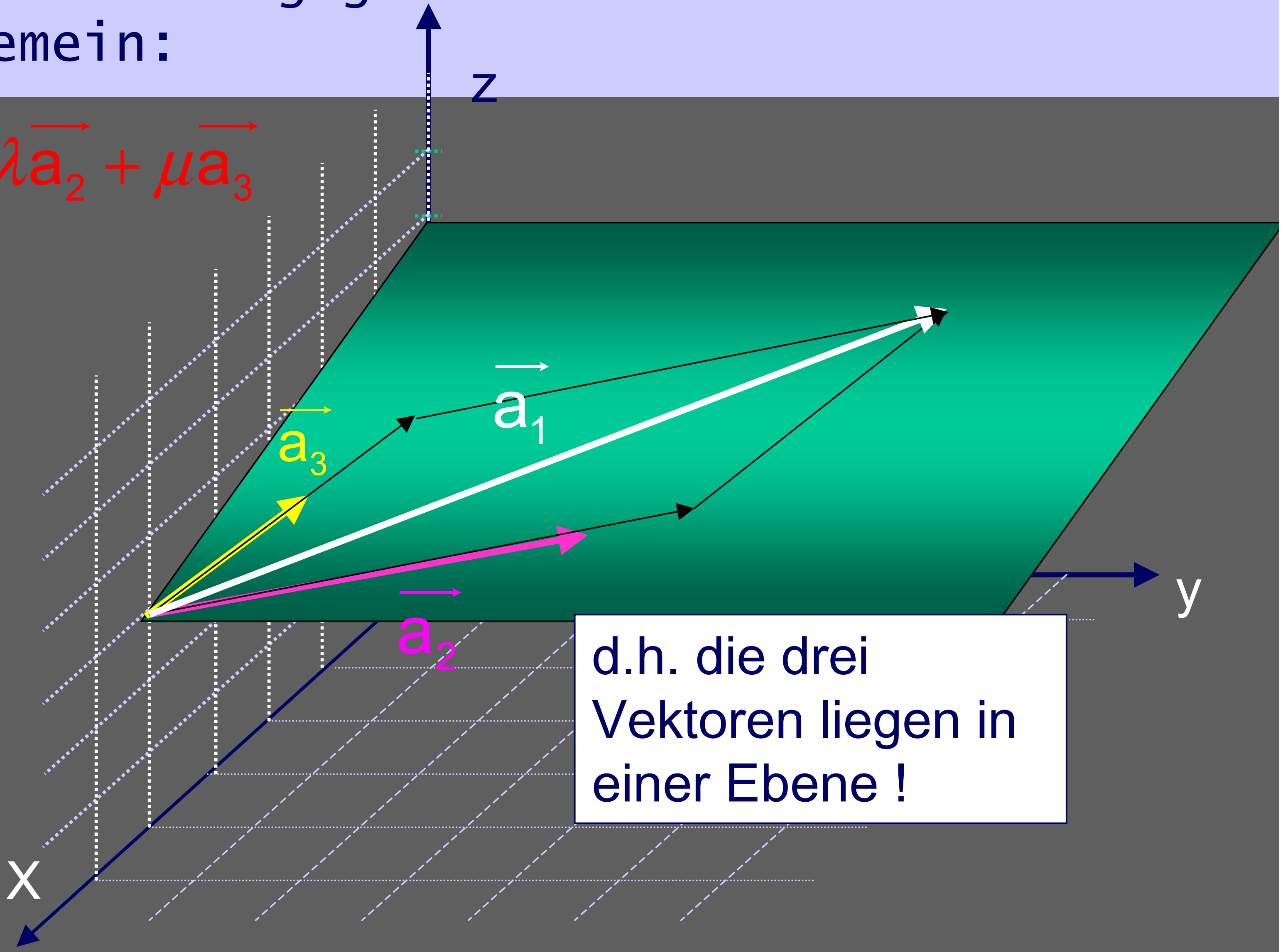
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_1} = -\frac{k_2}{k_1}\overrightarrow{a_2} - \frac{k_3}{k_1}\overrightarrow{a_3}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{a_1} = \lambda\overrightarrow{a_2} + \mu\overrightarrow{a_3}$$

d.h. die drei Vektoren liegen in einer Ebene !

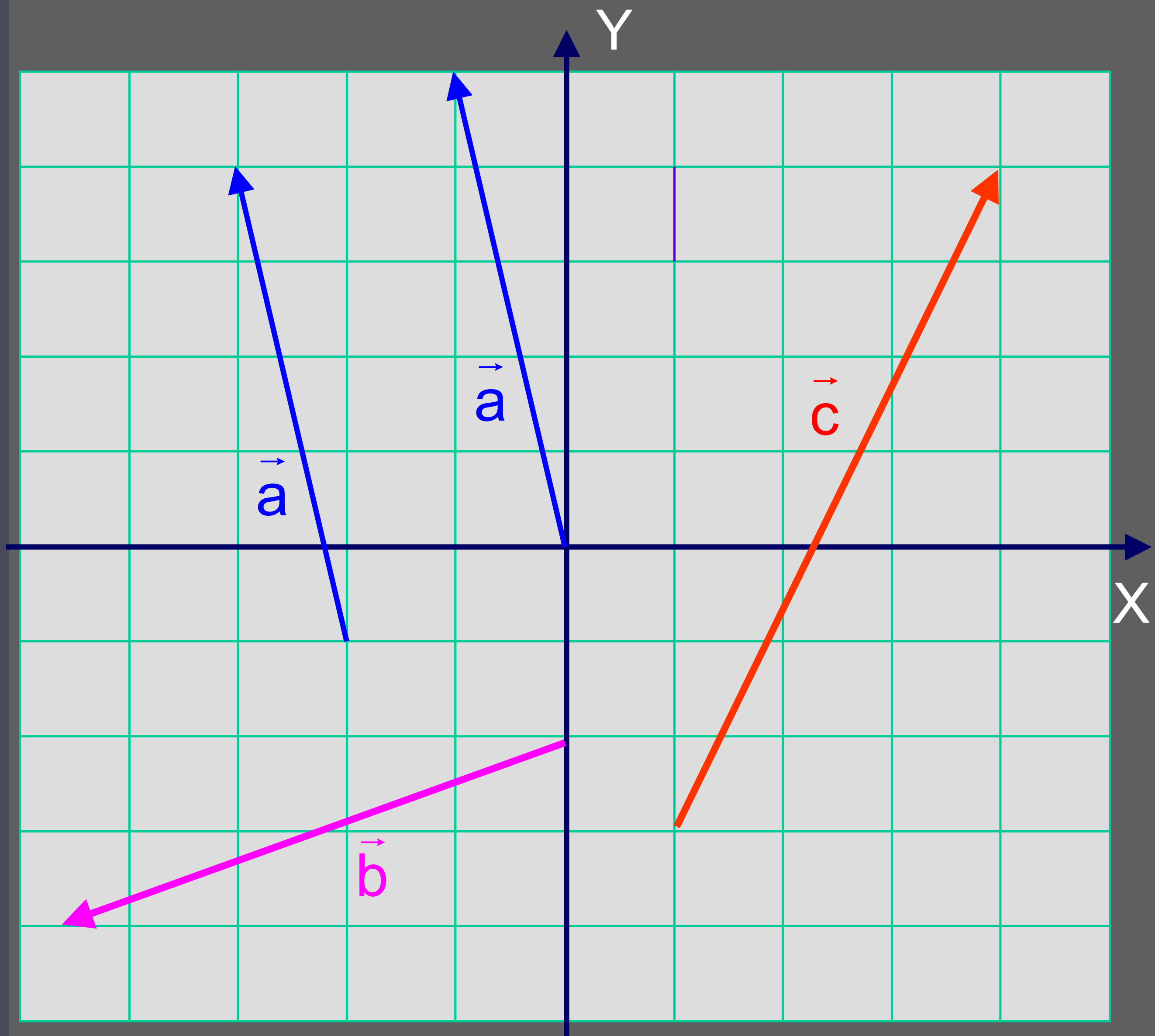
Lineare Abhängigkeit von 3 Vektoren allgemein:

$$\vec{a_1} = \lambda \vec{a_2} + \mu \vec{a_3}$$



d.h. die drei Vektoren liegen in einer Ebene !

Vektoren im Koordinatensystem

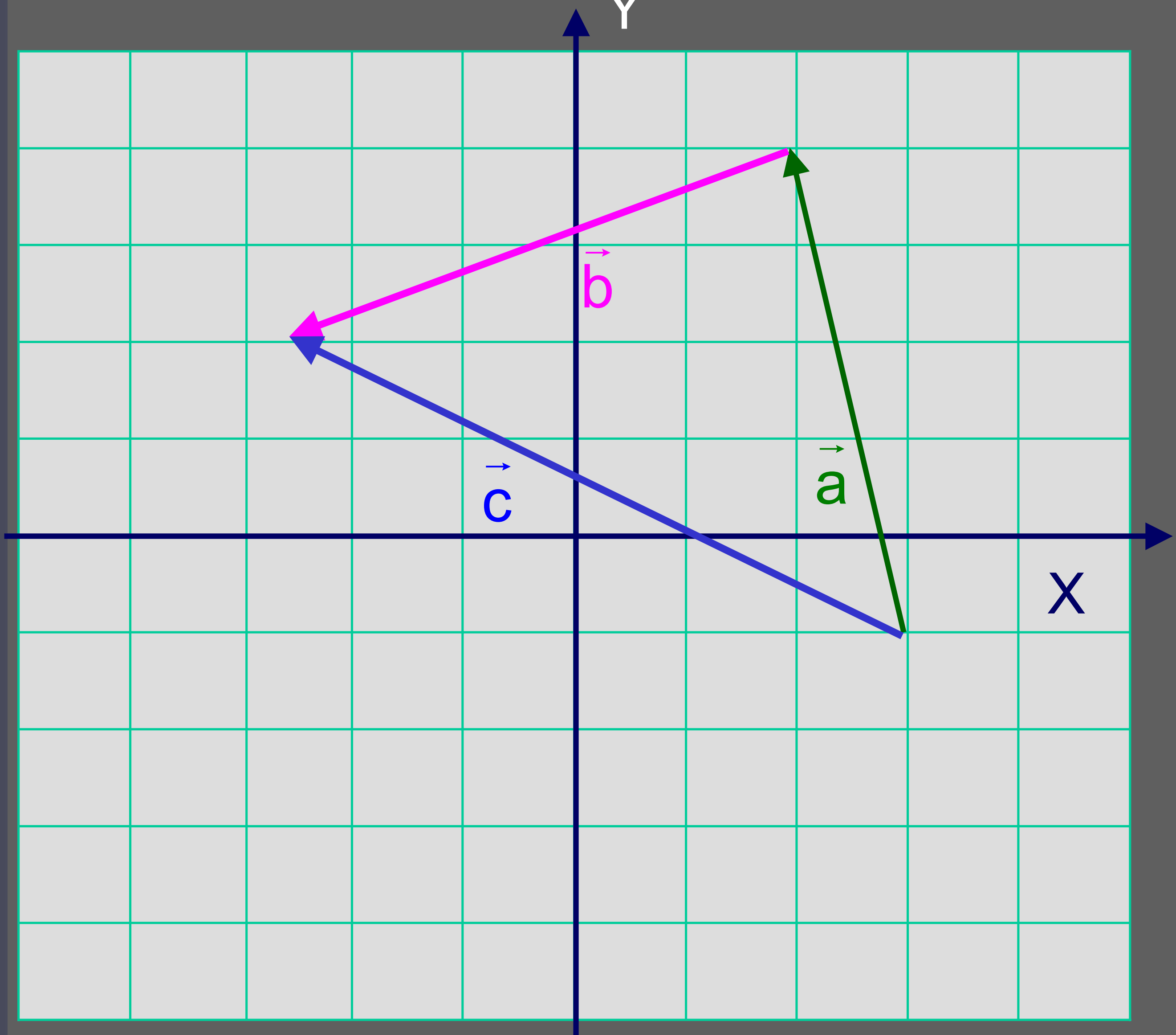


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Addition



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix} -5{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

n-Tupel

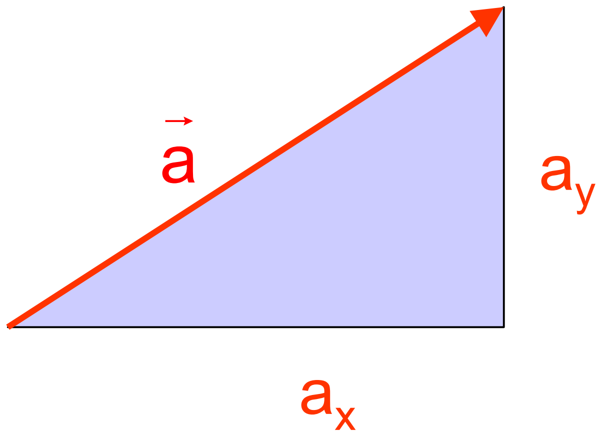
Vektoren in der Ebene können durch 2-Tupel eindeutig dargestellt werden :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ „2-dimensionaler Vektor“

Ein n-Tupel bezeichnet eine geordnete Darstellung von n Objekten.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ .. \\ a_n \end{pmatrix}$$ „n-dimensionaler Vektor“

Die Länge (der Betrag) eines Vektors :



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

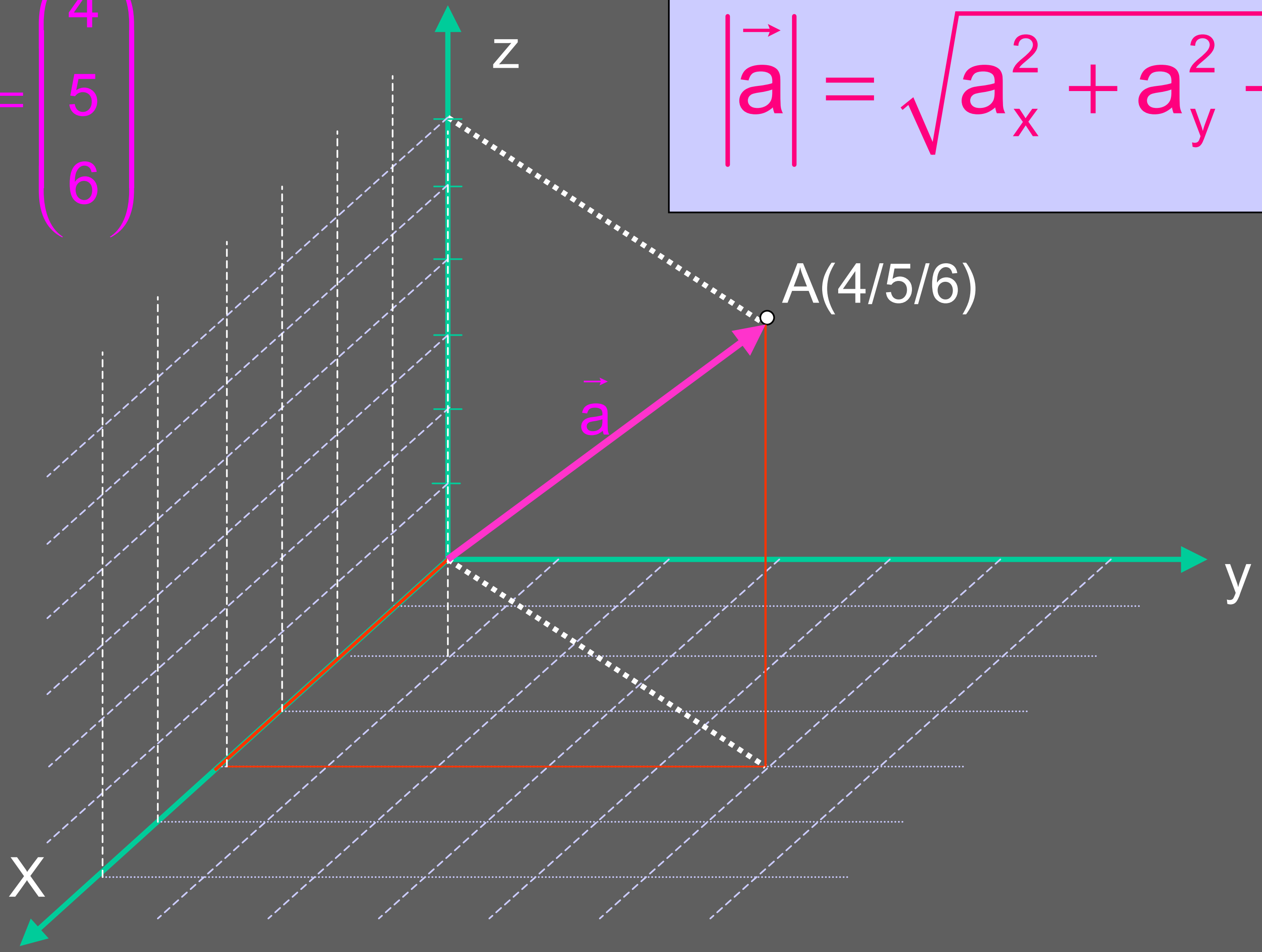
Satz des Pythagoras :

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Die Länge (der Betrag) eines Vektors :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Linearkombinationen mit Vektoren :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

$$r \bullet \vec{a} + s \bullet \vec{b} + t \bullet \vec{c} + = r \bullet \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + s \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} + t \bullet \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r \cdot a_x \\ r \cdot a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \cdot b_x \\ s \cdot b_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \cdot c_x \\ t \cdot c_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r \cdot a_x + s \cdot b_x + t \cdot c_x \\ r \cdot a_y + s \cdot b_y + t \cdot c_y \end{pmatrix}$$

Linearkombinationen mit Vektoren 2 :

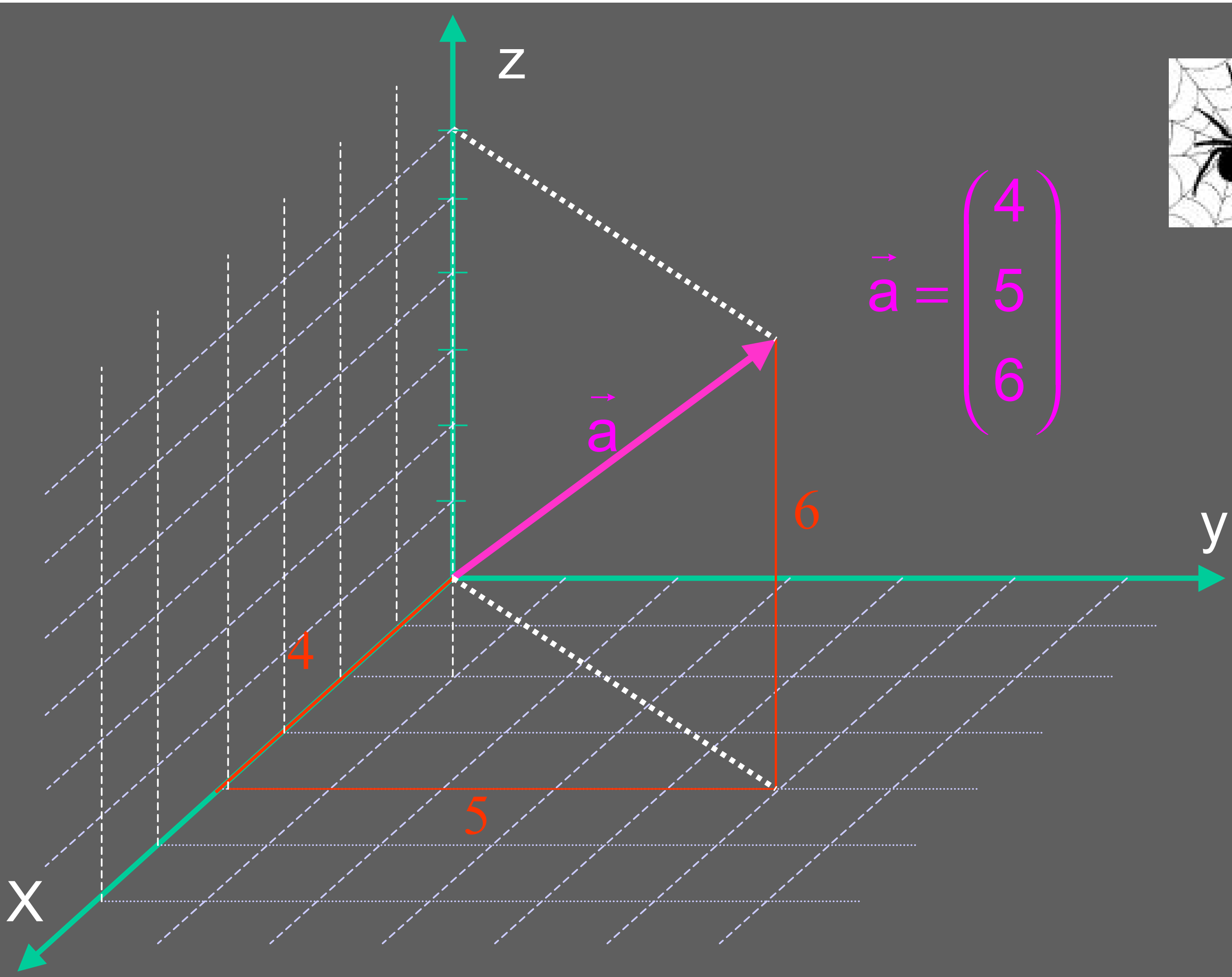
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$0{,}5 \bullet \vec{a} + 3 \bullet \vec{b} - 2 \bullet \vec{c} + = 0{,}5 \bullet \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \bullet \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$$

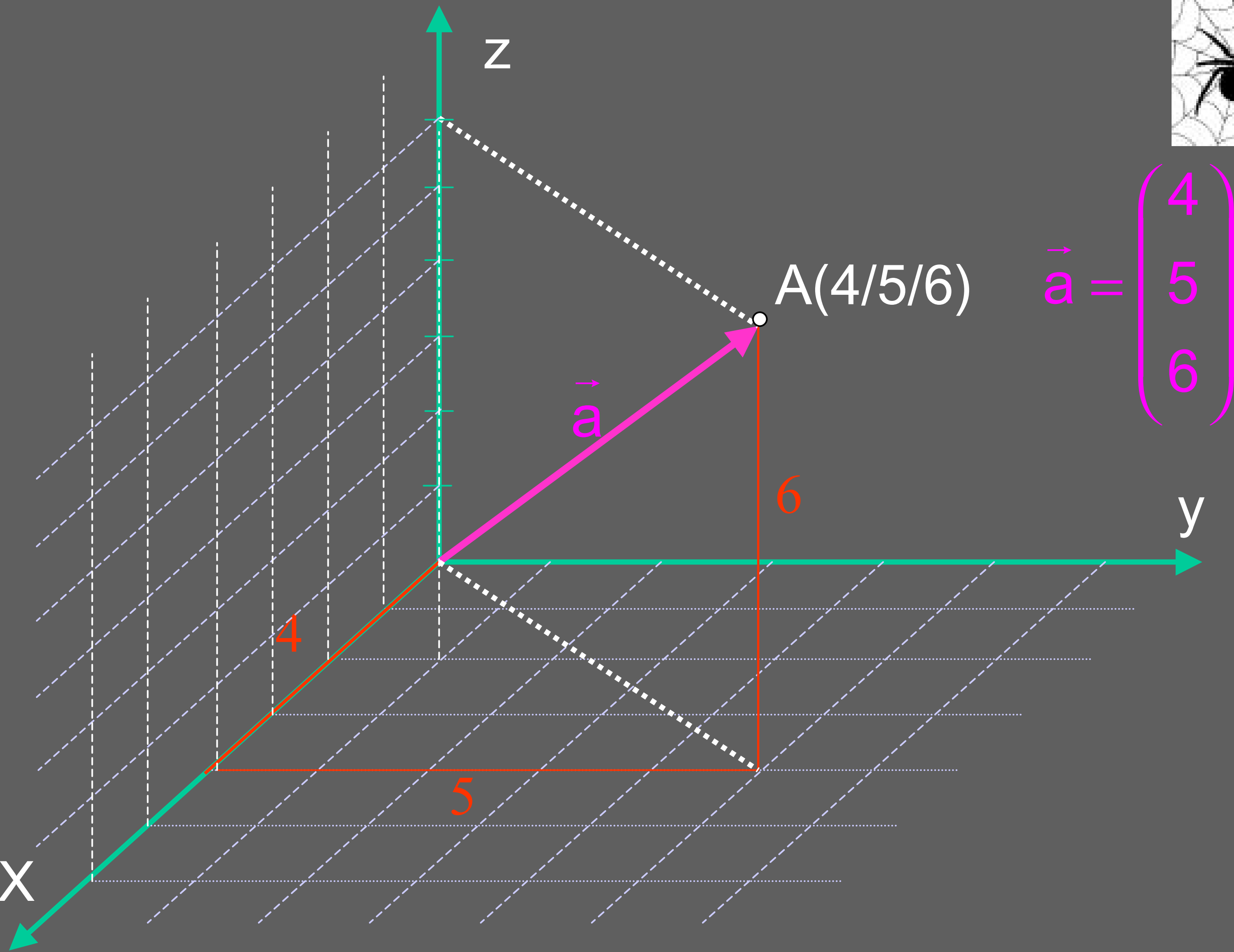
$$= \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}75 - 3 - 5{,}6 \\ -1 + 9 + 0{,}8 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} -7{,}85 \\ 8{,}8 \end{pmatrix}$$

Vektoren im räumlichen Koordinatensystem



Punkte und die zugehörigen Ortsvektoren



Ortsvektoren

Der Ortsvektor $\vec{p}$ des Punktes $P(x/y/z)$ hat die Komponentendarstellung

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

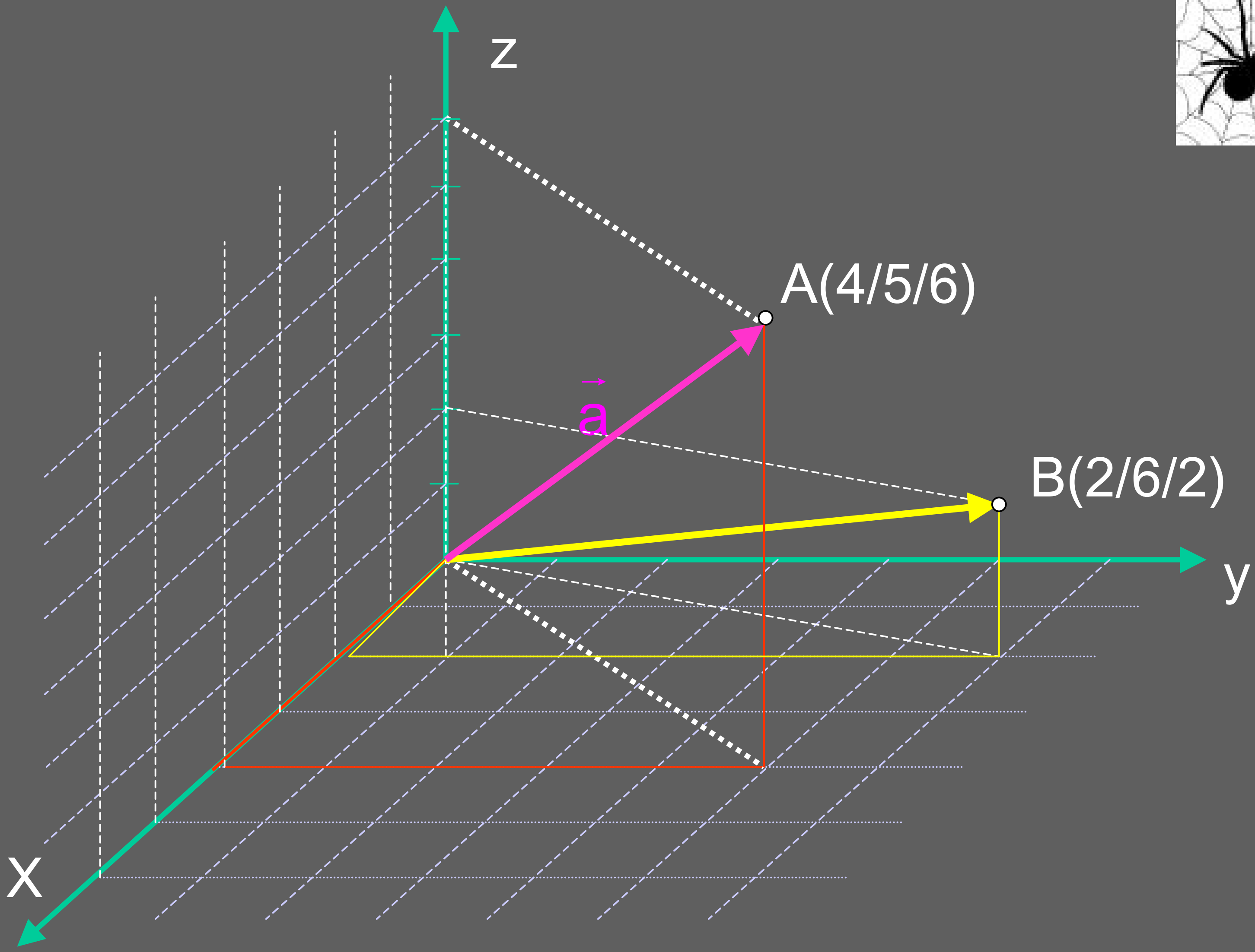
Der Ortsvektor hat seinen Anfangspunkt im Ursprung des Koordinatensystems und die Spitze im Punkt P

Zur Unterscheidung schreiben wir Vektoren als 3-Tupel in Spaltenform und Punkte als 3-Tupel in Zeilenform !

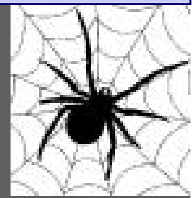
Punkte und die zugehörigen Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

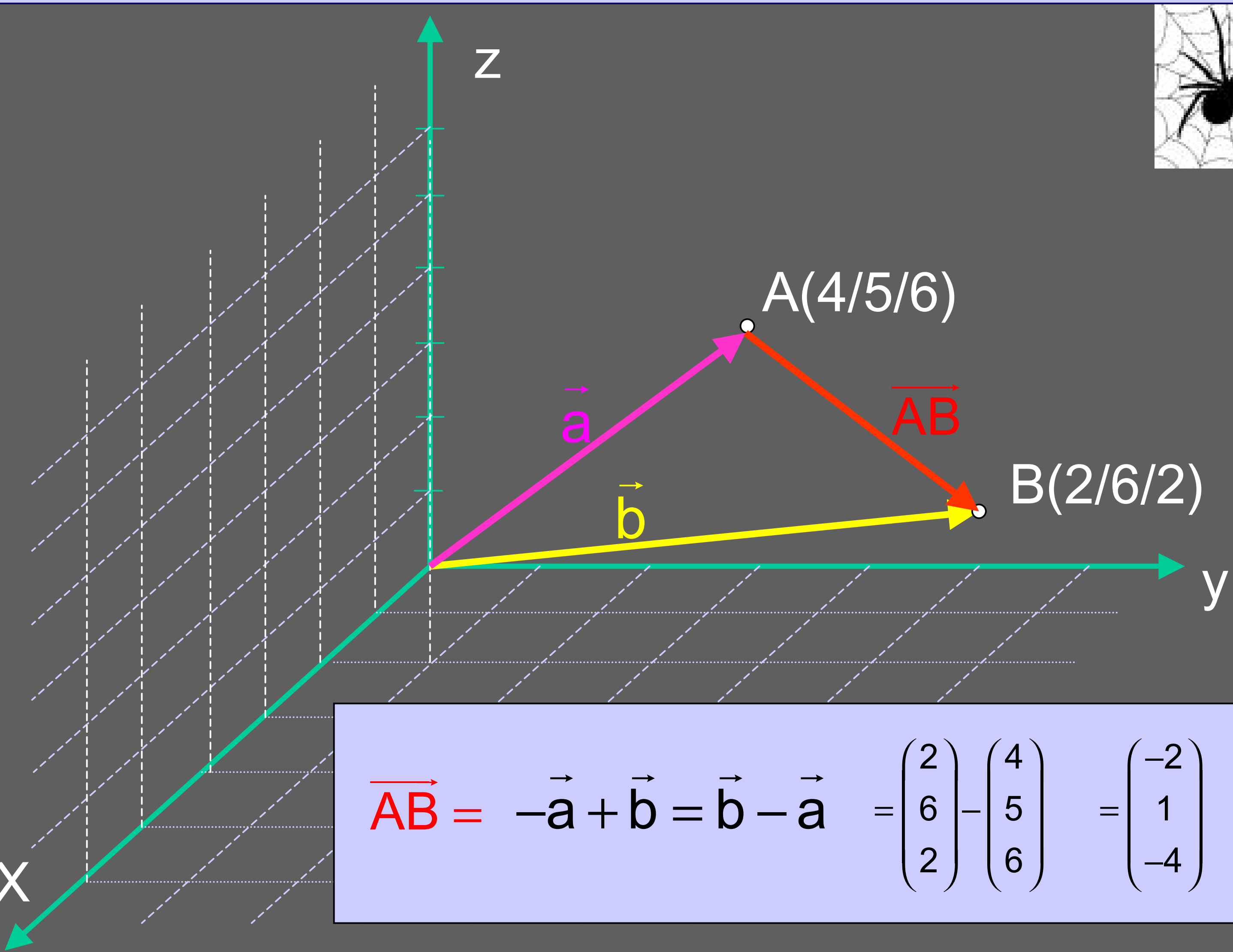


Punkte und die zugehörigen Ortsvektoren

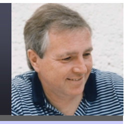


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

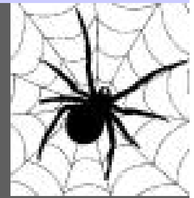
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

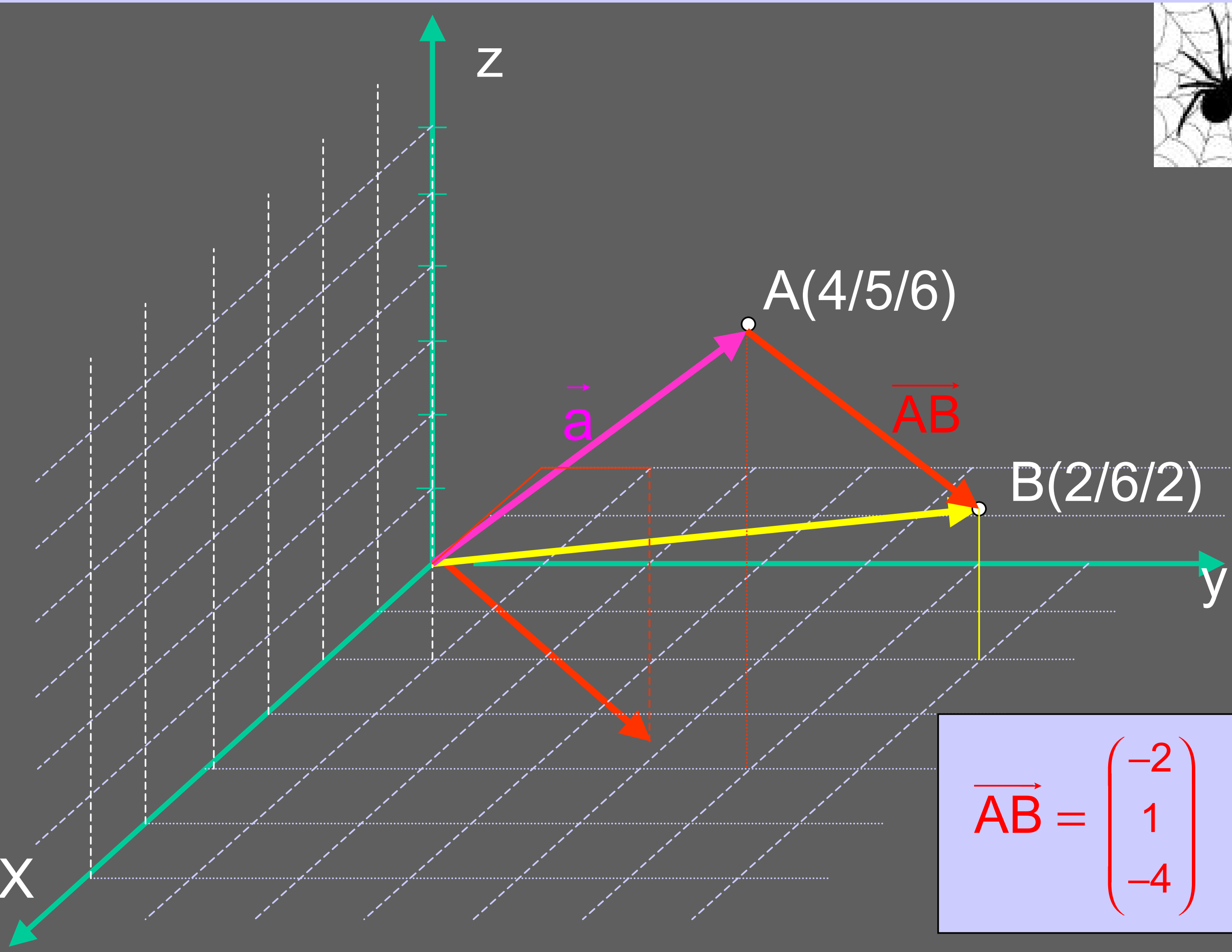


$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Punkte und die zugehörigen Ortsvektoren





$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren

Merke:

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ zwischen zwei Punkten $A(a_x|a_y|a_z)$ und $B(b_x|b_y|b_z)$ ergibt sich zu

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \\ b_z - a_z \end{pmatrix}$$