Ganzrationale Funktionen

Definition: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ heißt die Funktion

$$f: x \to f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 \quad D = \mathbb{R}$$

ganzrationale Funktion.

Die Koeffizienten a_0, a_1, ...a_n sind dabei reelle Zahlen.

Die GRF ist n-ten Grades, falls $a_n \neq 0$. Der Grad ist die höchste vorkommende Potenz von x !

n=3 : kubische Funktionen
n=2 : quadratische Funktionen
n=1 : lineare Funktionen
n=0 : konstante Funktionen

Definition: Eine Zahl $x_0 \in D$ für die f(x)=0 ist, heißt Nullstelle der Funktion f

Satz: Ist $x_0 \in D_f$ eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f n-ten Grades, dann lässt sich f in der Form

$$f(x) = (x - x_0) \cdot (c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0)$$

schreiben. D.h. f lässt sich als Produkt mit dem Linearfaktor (x-x_0) und einer ganzrationalen Funktion mit dem Grad n-1 schreiben.

Bemerkung: Besitzt das Restpolynom wieder eine Nullstelle $x_1 \in D_f$ so lässt sich ein weiterer Linearfaktor abspalten:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (d_{n-2}x^{n-2} + ... + d_1 x + d_0)$$

Daraus folgt unmittelbar der

Satz: Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades besitzt höchstens n Nullstellen.

Nützlich ist folgender

Satz: Wenn die ganzrationale Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad D = \mathbb{R}$$

eine ganzzahlige Nullstelle g besitzt <u>und</u> alle a_i für i=0,….,n ganzzahlig sind, dann ist g ein Teiler von a_0

Beweis: Wegen f(g)=0 ist

$$0 = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots\dots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$$

und damit

$$-a_0 = g \cdot \underbrace{(a_n g^{n-1} + a_{n-1} g^{n-2} + \dots\dots + a_2 g^1 + a_1)}_{\in \mathbb{Z}}$$

d.h. g ist ein Teiler von a_0

Anwendung:

A1) Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Falls es eine ganzzahlige Nullstelle gibt, kann es nur ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 sein.

Man sieht leicht, das x_0=1 eine Nullstelle ist.

Damit ist dann $f(x) = (x-1) \cdot r(x)$

Das Restpolynom findet man durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -x^2 - 5x \\
\quad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Die restlichen Nullstellen lassen sich jetzt leicht finden :

Falls es eine ganzzahlige Nullstelle von $r(x) = x^2 - x - 6$ gibt, kann es wiederum nur ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 sein:

Man sieht leicht, das x_0=3 und x_0=-2 weitere Nullstellen sind.

Damit ergibt sich dann:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x-3)\cdot(x+2)$$

A2) Bestimme die Nullstellen von

$$k(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$$
$$h(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$$

A3) Eine ganzrationale Funktion f n-ten Grades hat mit einer anderen Funktion g , deren Grad höchstens n ist, maximal n Stellen x_i mit $f(x_i)=g(x_i)$
Hinweis : Betrachte die Differenzfunktion d(x)=f(x)-g(x) !

A4) Bestimme mit Hilfe der Polynomdivision $(x^5 - 1) : (x-1)$

Satz: Für große positive x (d.h. für $x \to \infty$) und für kleine negative x (d.h. für $x \to -\infty$) wird der Verlauf einer GRF n-ten Grades durch den Verlauf von $a_n x^n$ bestimmt.

Beispiel :

$$\lim_{x\to\infty}(x^4 + x^3 + 2x - 4) = \lim_{x\to\infty}(x^4) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^4 + x^3 + 2x - 4) = \lim_{x\to-\infty}(x^4) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3 + 100x^2 + 2000x - 4) = \lim_{x\to\infty}(3x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^3 + 100x^2 + 2000x - 4) = \lim_{x\to-\infty}(3x^3) = -\infty$$

Bemerkung: Mit der Schreibweise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ meine wir:

Die Funktionswerte von f übersteigen jede noch so große Zahl, wenn man nur x genügend groß wählt.

Mit der Schreibweise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ meine wir:

Die Funktionswerte von f unterbieten jede (betragsmäßig) noch so große negative Zahl, wenn man nur x genügend groß wählt.

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$