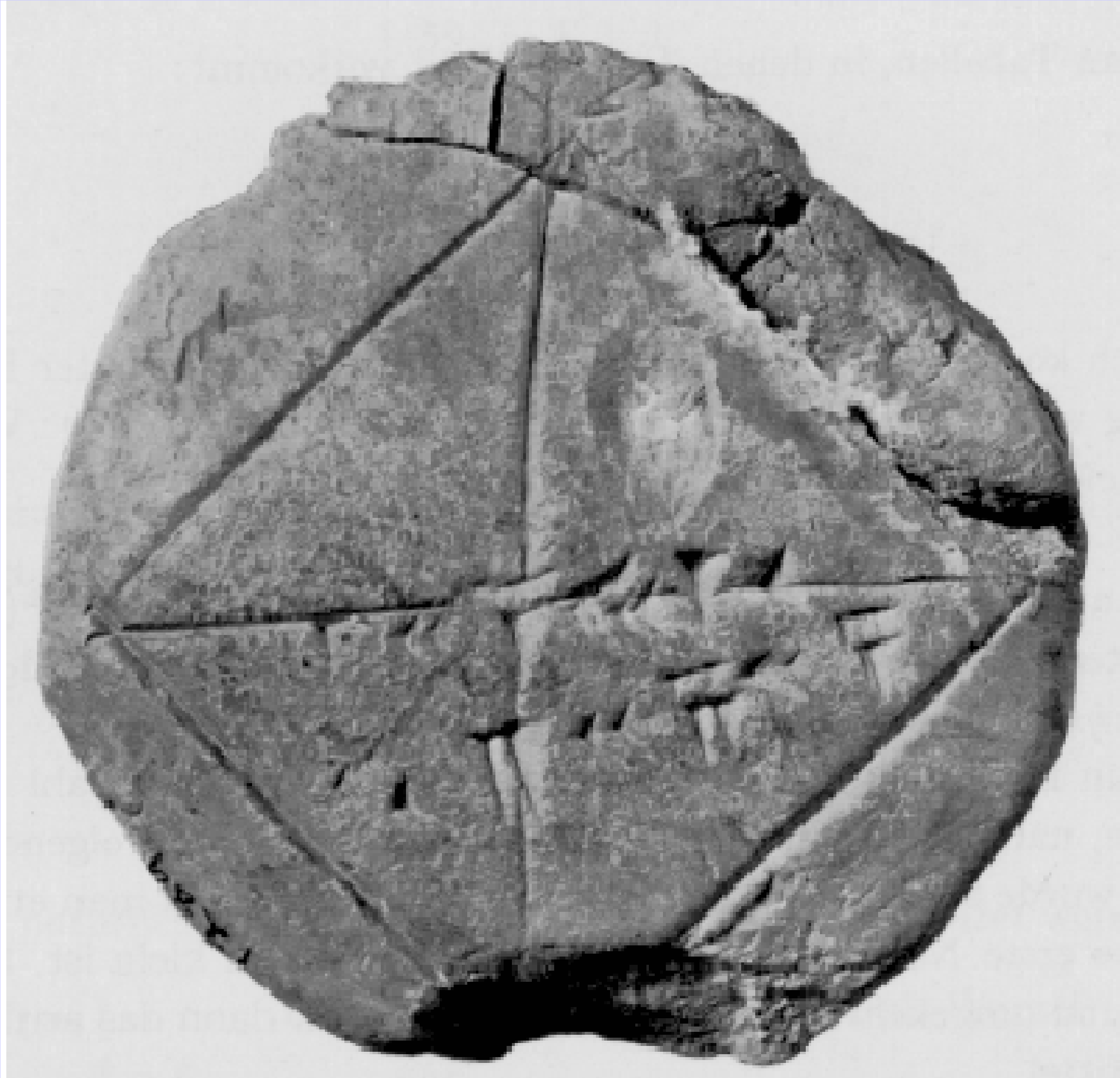
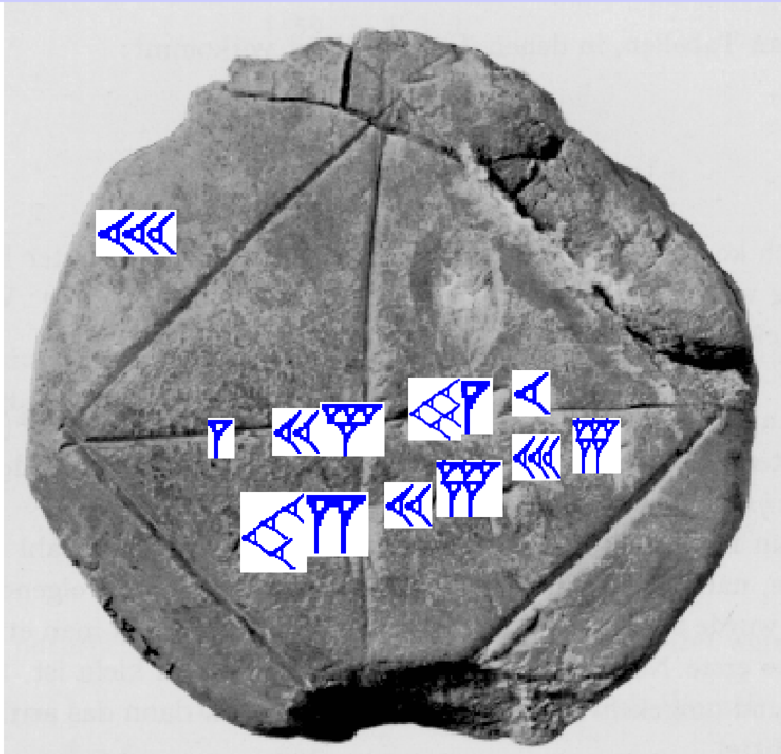
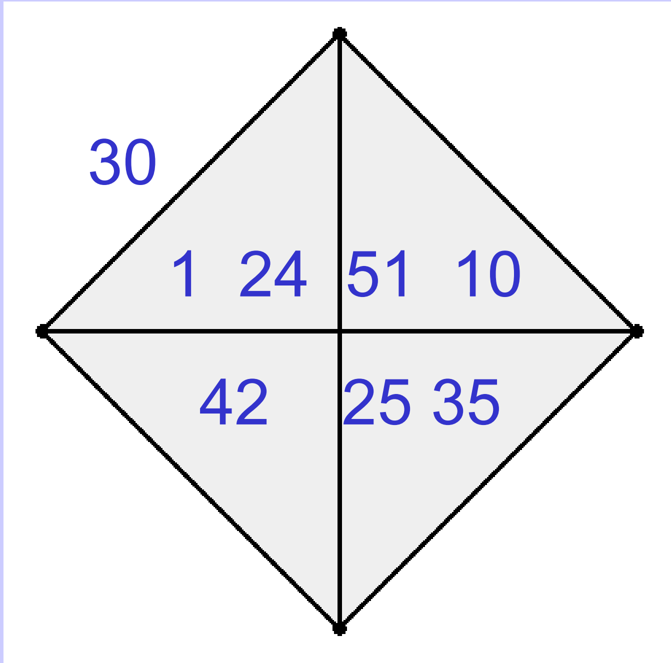
Babylonische Tontafel



Babylonische Tontafel



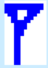
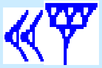
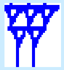
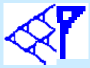
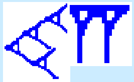
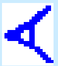
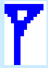
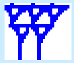


Die 59 Ziffern der Babylonier

(2300-300 v.Chr.)

1		11		21		31		41		51	
2		12		22		32		42		52	
3		13		23		33		43		53	
4		14		24		34		44		54	
5		15		25		35		45		55	
6		16		26		36		46		56	
7		17		27		37		47		57	
8		18		28		38		48		58	
9		19		29		39		49		59	
10		20		30		40		50			

Das Sexagesimalsystem der Babylonier

60^2	60^1	60^0	,	60^{-1}	60^{-2}	60^{-3}
						
						
			,			
			,			

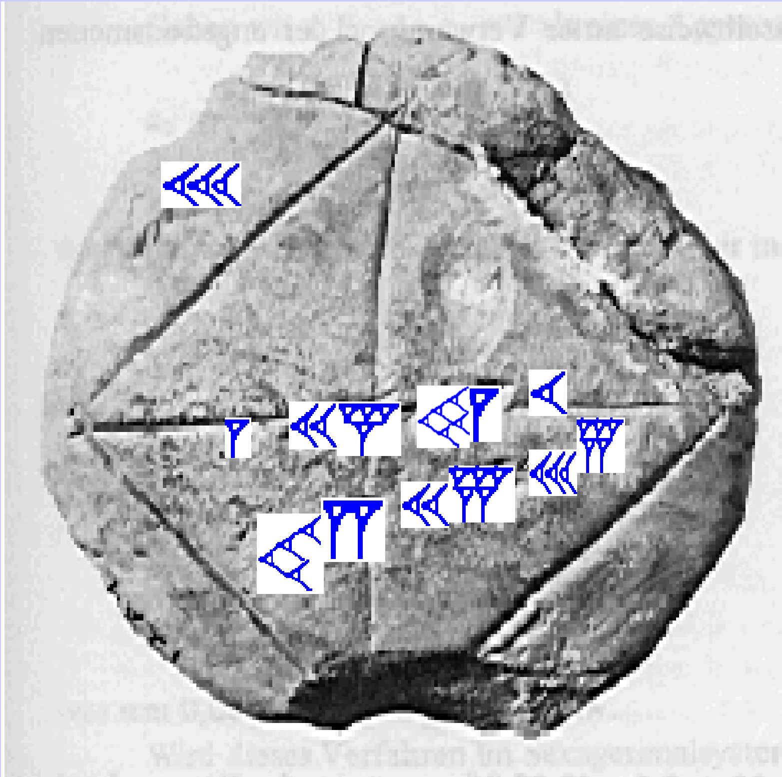
$$1\cdot 60^2+24\cdot 60^1+30\cdot 60^0=5070$$

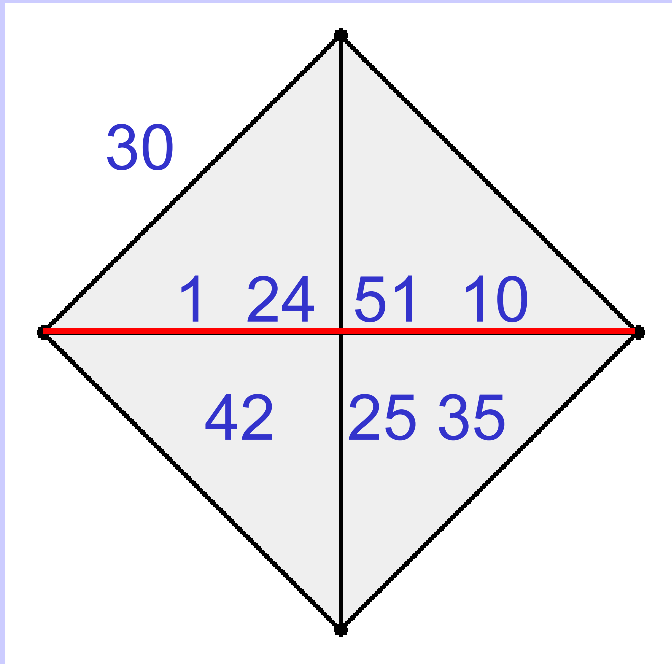
$$5\cdot 60^1+51\cdot 60^0=351$$

$$50\cdot 60^0+30\cdot 60^{-1}=50{,}5$$

$$10\cdot 60^1+1\cdot 60^0+5\cdot 60^{-1}+20\cdot 60^{-3}\approx 601{,}083$$

Die Auflösung der Scheibeninschrift





$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1{,}4142129 \approx \sqrt{2}$$

$$42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} \approx 42{,}42638 \approx 30 \cdot \sqrt{2}$$

Das Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{2}$

Idee:

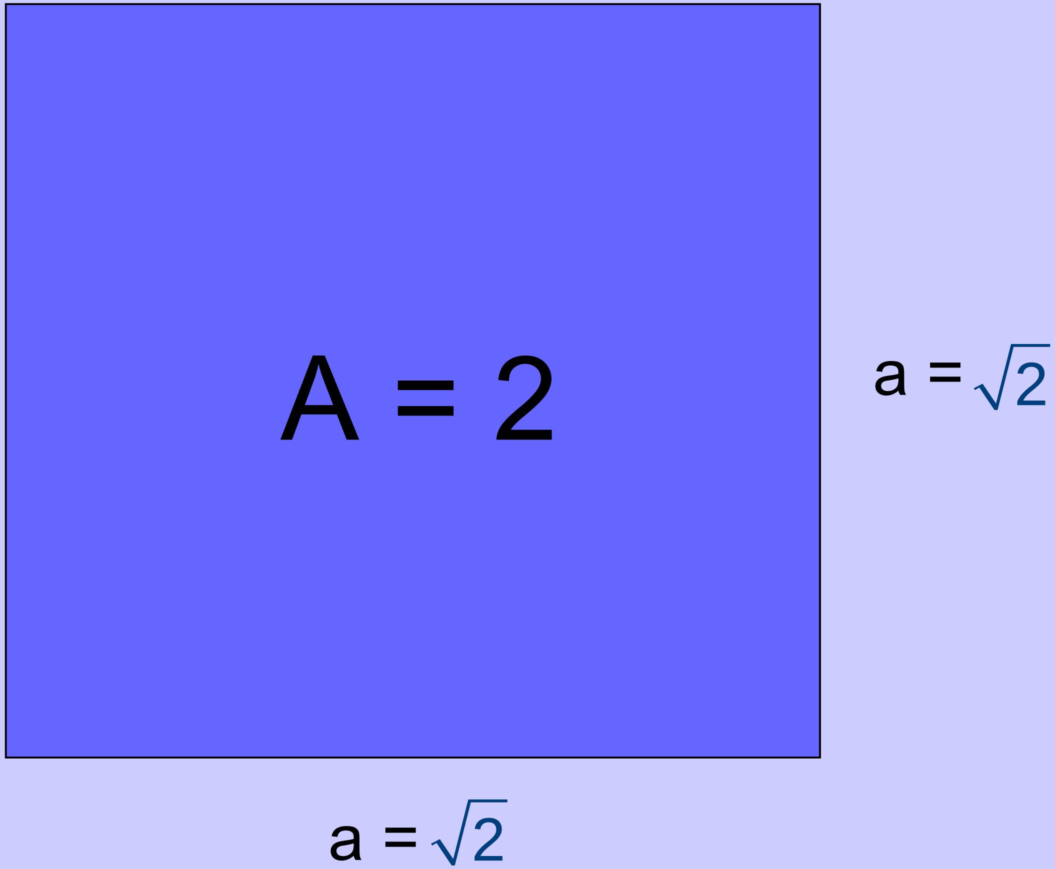
Ein Quadrat mit

dem Flächeninhalt

A=2

hat die Seitenlänge

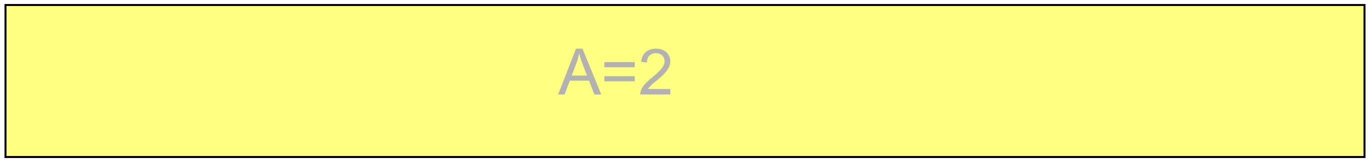
a= $\sqrt{2}$



Das Heron-Verfahren

Ich beginne mit einem Rechteck mit dem Flächeninhalt 2 :

Startwert : a=3



$$b_0 = \frac{2}{3}$$

$$a_0 = 3$$

a ist zu groß , b ist zu klein $\Longrightarrow$ neuer Wert: $a_1 = \left(3 + \frac{2}{3}\right) : 2 = \frac{11}{6}$

Das Heron-Verfahren

Ich beginne mit einem Rechteck mit dem Flächeninhalt 2 :

Startwert : a=3

A=2

$b_0 = \frac{2}{3}$

$a_0 = 3$

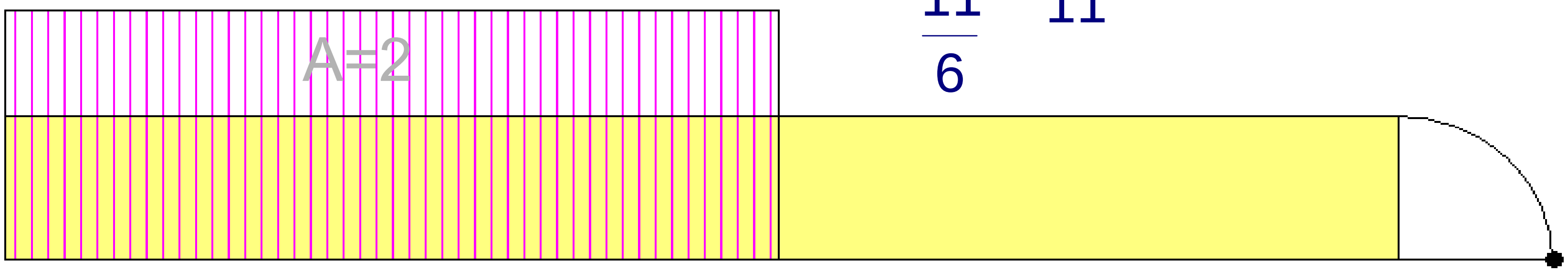
a ist zu groß , b ist zu klein $\Longrightarrow$ neuer Wert: $a_1 = \left(3 + \frac{2}{3}\right) : 2 = \frac{11}{6}$

Das Heron-Verfahren

neuer Wert :

$$a_1 = \frac{11}{6}$$

$$b_1 = \frac{2}{\frac{11}{6}} = \frac{12}{11}$$



$$a_1 = \frac{11}{6}$$

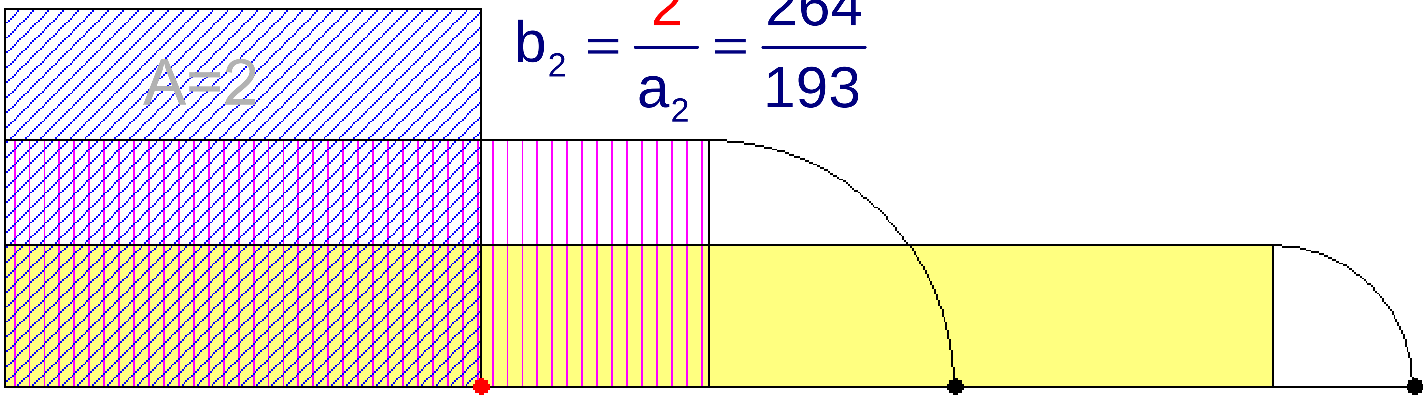
a ist zu groß , b ist zu klein $\Rightarrow$ neuer Wert: $a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{11}{6} + \frac{12}{11} \right) = \frac{193}{132}$

Das Heron-Verfahren

neuer Wert :

$$a_2 = \frac{193}{132}$$

$$b_2 = \frac{2}{a_2} = \frac{264}{193}$$



$$a_2 = \frac{193}{132}$$

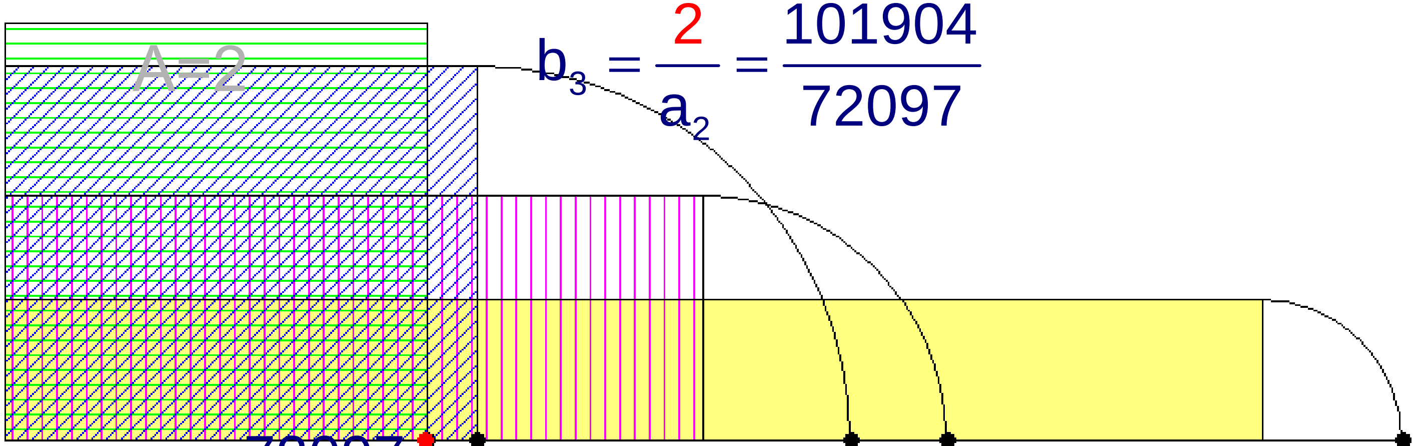
a ist zu groß ,

b ist zu klein $\Rightarrow$ neuer Wert: $a_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{193}{132} + \frac{264}{103} \right) = \frac{72097}{50952}$

Das Heron-Verfahren

neuer Wert :

$$a_3 = \frac{72097}{50952}$$



$$b_3 = \frac{2}{a_2} = \frac{101904}{72097}$$

$$a_3 = \frac{72097}{50952}$$

a ist zu groß ,

b ist zu klein

$\Rightarrow$ neuer Wert: $a_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{72097}{50952} + \frac{101904}{72097} \right) = \frac{10390190017}{7346972688}$

Das Heron-Verfahren

$$a_4 = \left(\frac{72097}{50952} + \frac{101904}{72097} \right) : 2 = \frac{10390190017}{7346972688} \approx 1{,}41421378$$

$$b_4 = \frac{2}{\frac{10390190017}{7346972688}} = \frac{14693945376}{10390190017} \approx 1{,}41421334$$

$$a_6 = \frac{93236038714671382520186472510594280409857}{65927835226115610973831953438649073659968}$$

$$a_6 \approx 1.4142135623730 9$$

$$a_4 = \left(\frac{72097}{50952} + \frac{101904}{72097}\right) : 2 = \frac{10390190017}{7346972688} \approx 1{,}41421378$$

$$b_4 = \frac{2}{\frac{10390190017}{7346972688}} = \frac{14693945376}{10390190017} \approx 1{,}41421334$$

$$a_6 = \frac{93236038714671382520186472510594280409857}{65927835226115610973831953438649073659968}$$

$$a_6 \approx 1.4142135623730 9$$

Struktogramm

Berechnung von $\sqrt{2}$ nach Heron

$a := 3$

wieder-hole

- $a_{alt} := a$
- $a := \frac{1}{2}\left(a_{alt} + \frac{2}{a_{alt}}\right)$
- a ausgeben

solange bis $|a - a_{alt}| < 0{,}000001$

Excel-Tabelle

Heron-Verfahren

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{z}{x_n}\right) \; ; \; z \in \mathbb{R}^+ \; ; \; n \in \mathbb{N}_0$$

SQRT(	2)
Startwert	3

an	bn	(an+bn)/2
3,0000000000	0,6666666667	1,8333333333
1,8333333333	1,0909090909	1,4621212121
1,4621212121	1,3678756477	1,4149984299
1,4149984299	1,4134291302	1,4142137800
1,4142137800	1,4142133447	1,4142135624
1,4142135624	1,4142135624	1,4142135624
1,4142135624	1,4142135624	1,4142135624
1,4142135624	1,4142135624	1,4142135624

Iterationen mit Derive

ITERATES(Ausdruck, Iterationsvariable, Startwert, Anzahl der Iterationen)
bzw. ITERATE(….)

Derive 5 - [Algebra 2 Heron.dfw]

Datei Bearbeiten Einfügen Schreiben Vereinfachen Lösen Analysis Definieren Extras Fenster ?

#1: $\text{ITERATES}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right), x, 3, 6\right)$

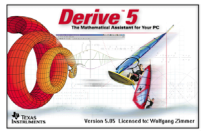
#2: $\left[3, \frac{11}{6}, \frac{193}{132}, \frac{72097}{50952}, \frac{10390190017}{7346972688}, \frac{215912063945802350977}{152672884556058511392}, \frac{93236038714671382520186472510594280409857}{65927835226115610973831953438649073659968}\right]$

#3: [3, 1.83333333333333, 1.46212121212121, 1.41499842989480, 1.41421378004719, 1.41421356237311, 1.41421356237309]

#4: $\text{ITERATE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right), x, 3, 6\right)$

#5: $\frac{93236038714671382520186472510594280409857}{65927835226115610973831953438649073659968}$

#6: 1.41421356237309



Iterationen mit Derive

ITERATES(Ausdruck, Iterationsvariable, Startwert, Anzahl der Iterationen)

bzw. ITERATE(….)

#9: $\text{ITERATE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right),\ x,\ 1.41,\ 35\right)$

```
#10:  1.41421356237309504880168872420969807856967187537694~
        80731766797379907324784621070388503875343276415727~
        350138462
```

```
#11:  1.41421356237309504880168872420969807856967187537694~
        807317667973799073247846210703885038753432764157 2
```

Das Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt[3]{2}$

Idee:

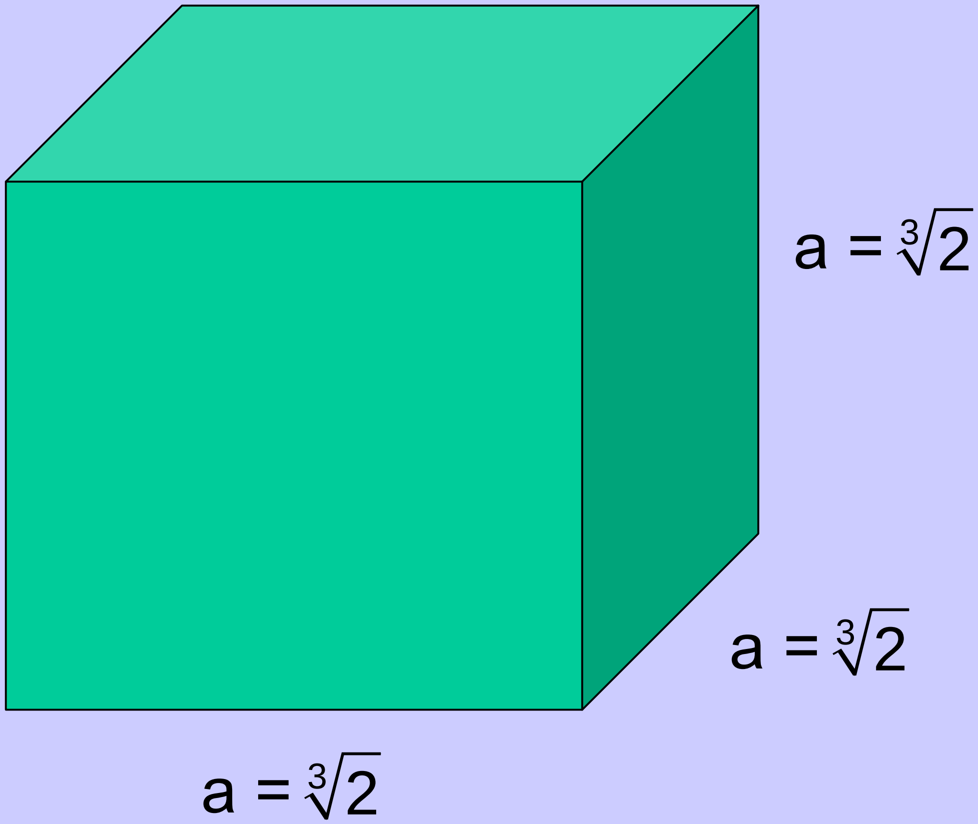
Ein Würfel mit

dem Volumen

V=2

hat die Seitenlänge

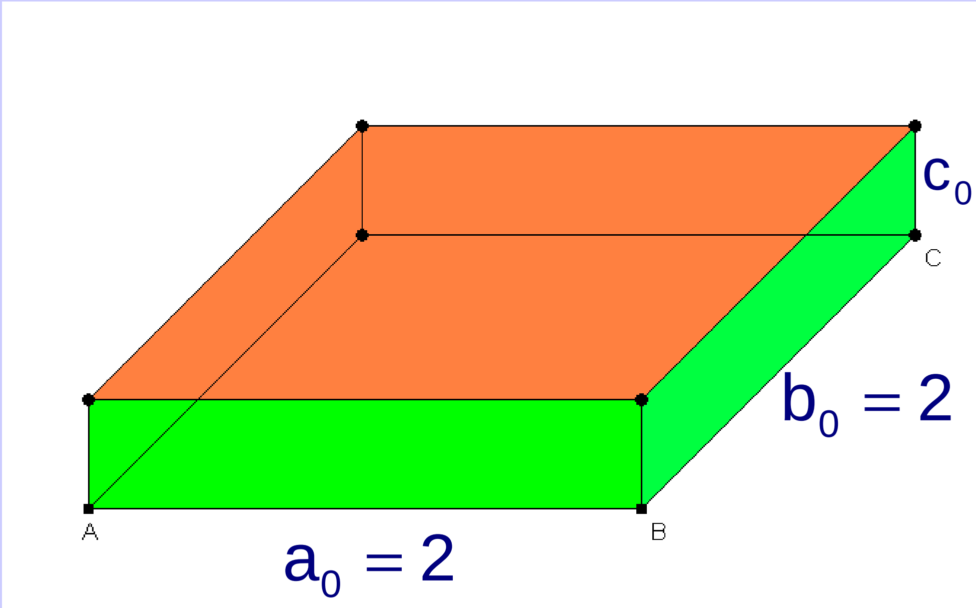
a= $\sqrt[3]{2}$



Das Heron-Verfahren

Ich beginne mit einem Quader mit dem Volumen V= 2 :

Startwert : a=b=2

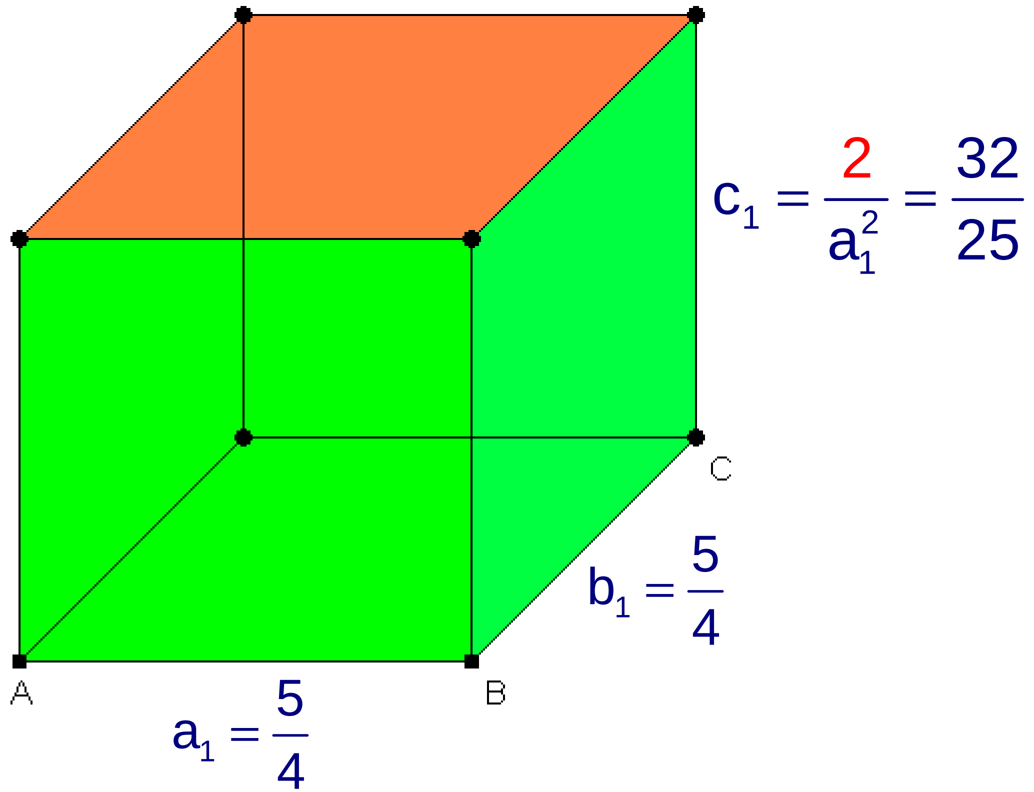


$$c_0 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

a ist zu groß , c ist zu klein $\Longrightarrow$ neuer Wert: $a_1 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) : 2 = \frac{5}{4}$

Das Heron-Verfahren

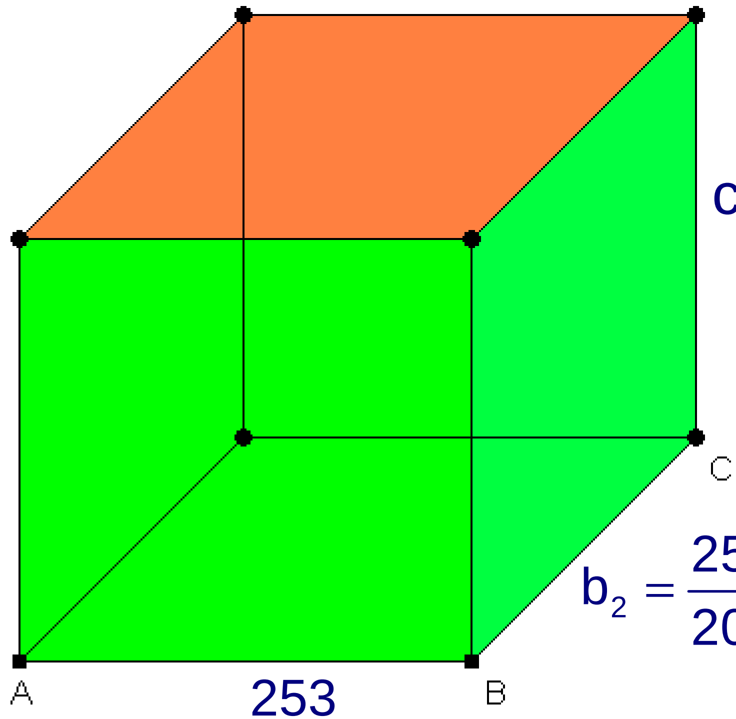
neuer Startwert: $a_1 = \frac{5}{4} = 1{,}25$



a ist zu groß , c ist zu klein $\Longrightarrow$ neuer Wert: $a_2 = \left(\frac{5}{4} + \frac{32}{25}\right) : 2 = \frac{253}{200}$

Das Heron-Verfahren

neuer Startwert: $a_2 = \frac{253}{200} = 1{,}265$



$c_2 = \frac{2}{a_2^2} = \frac{80000}{64009} \approx 1{,}2450$

$b_2 = \frac{253}{200}$

$a_2 = \frac{253}{200}$

a ist zu groß , c ist zu klein $\Longrightarrow$ neuer Wert: $a_3 = \left(\frac{253}{200} + \frac{80000}{64009}\right) : 2 \approx 1{,}257$

Struktogramm

Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ nach Heron

$a:=3$

wiederhole

- $a_{alt} := a$
- $a := \frac{1}{2}\left(a_{alt} + \frac{2}{a_{alt}^2}\right)$
- a ausgeben

solange bis $|a - a_{alt}| < 0{,}000001$

Excel-Tabelle

Heron-Verfahren

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{z}{x_n^2}\right) \; ; \; z \in \mathbb{R}^+ \quad ; \; n \in \mathbb{N}_0$$

3. Wurzel aus 2)

Startwert 2

an	cn	(an+cn)/2
2,0000000000	0,5000000000	1,2500000000
1,2500000000	1,2800000000	1,2650000000
1,2650000000	1,2498242435	1,2574121217
1,2574121217	1,2649539345	1,2611830281
1,2611830281	1,2574008805	1,2592919543
1,2592919543	1,2611801840	1,2602360692
1,2602360692	1,2592912476	1,2597636584
1,2597636584	1,2602358920	1,2599997752