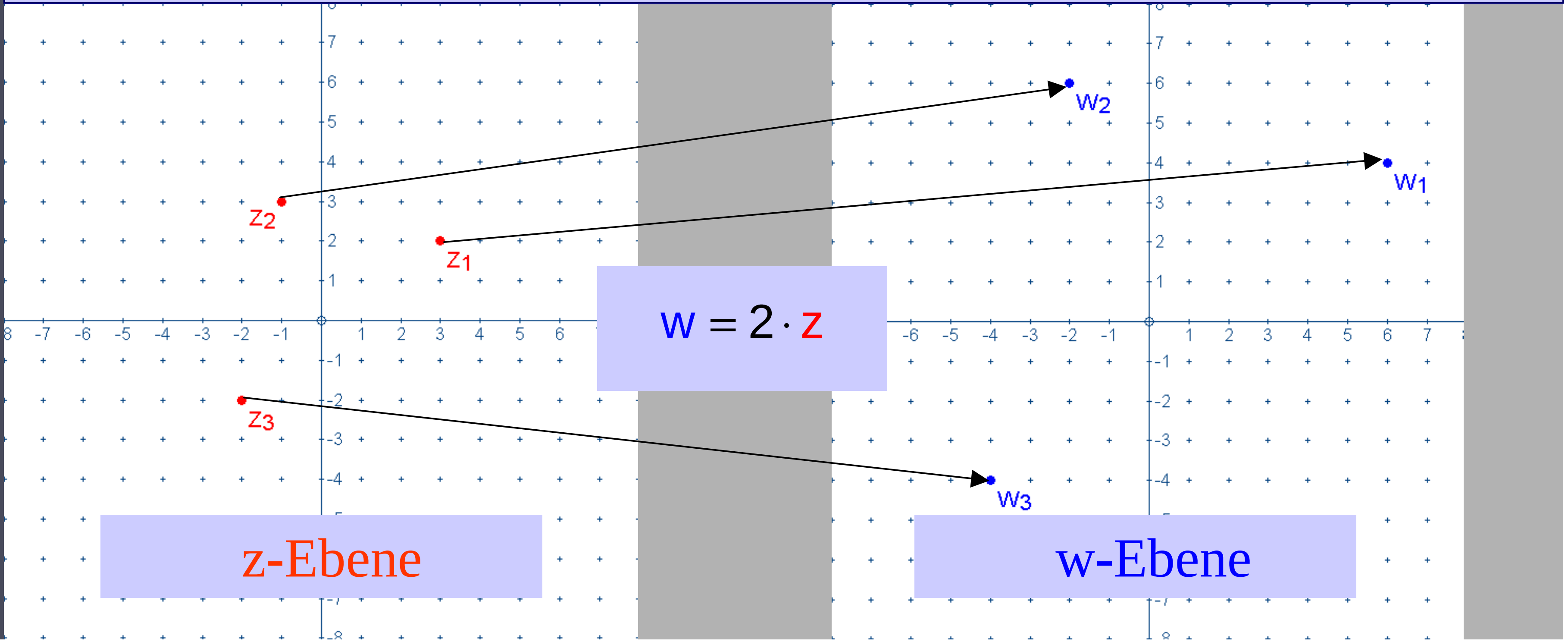
Komplexe Funktionen

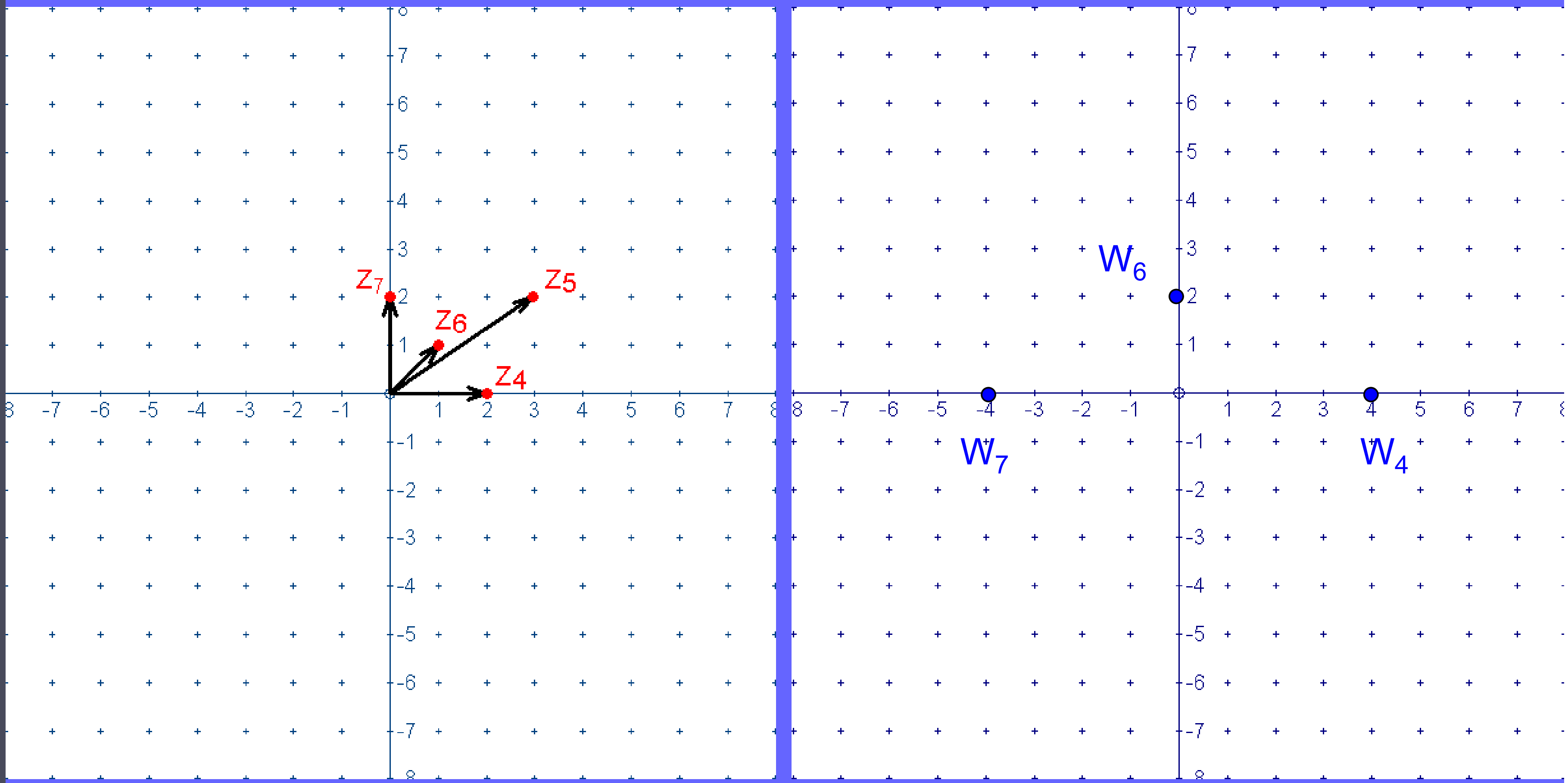
$$f: \; z \rightarrow w = f(z) \quad ; \; D_f \subseteq \mathbb{C}$$

Problem: Zur Darstellung der z-Werte und zur Darstellung der w-Werte benötige ich jeweils eine Ebene.

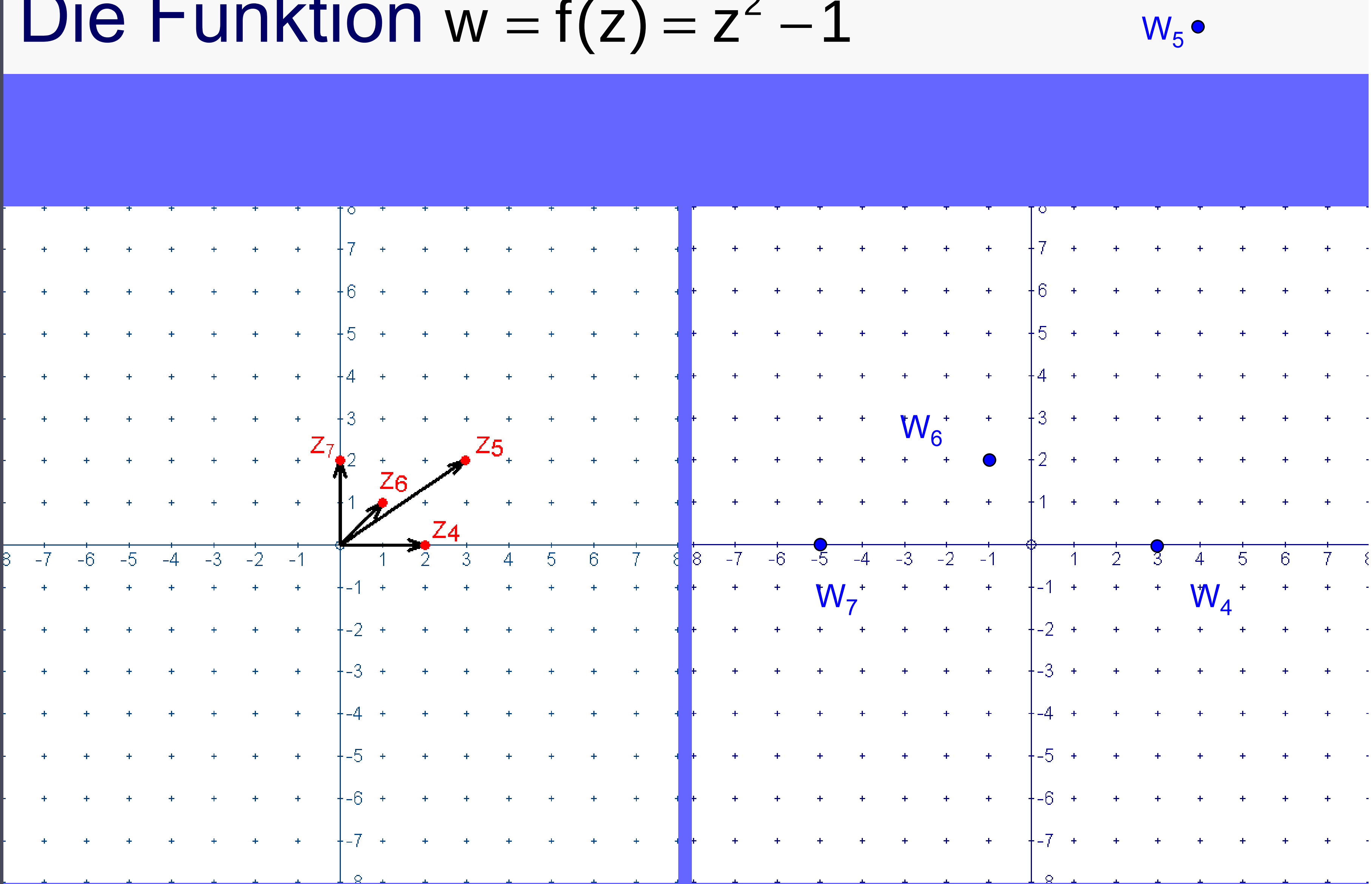


Die Funktion $w = f(z) = z^2$

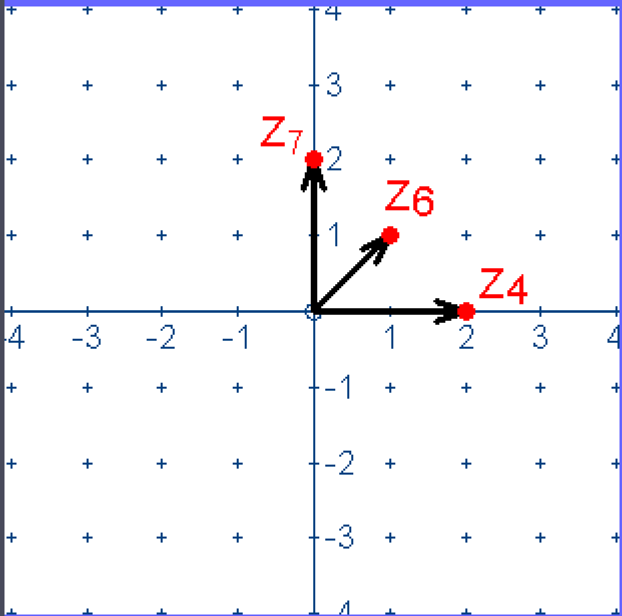
W_5

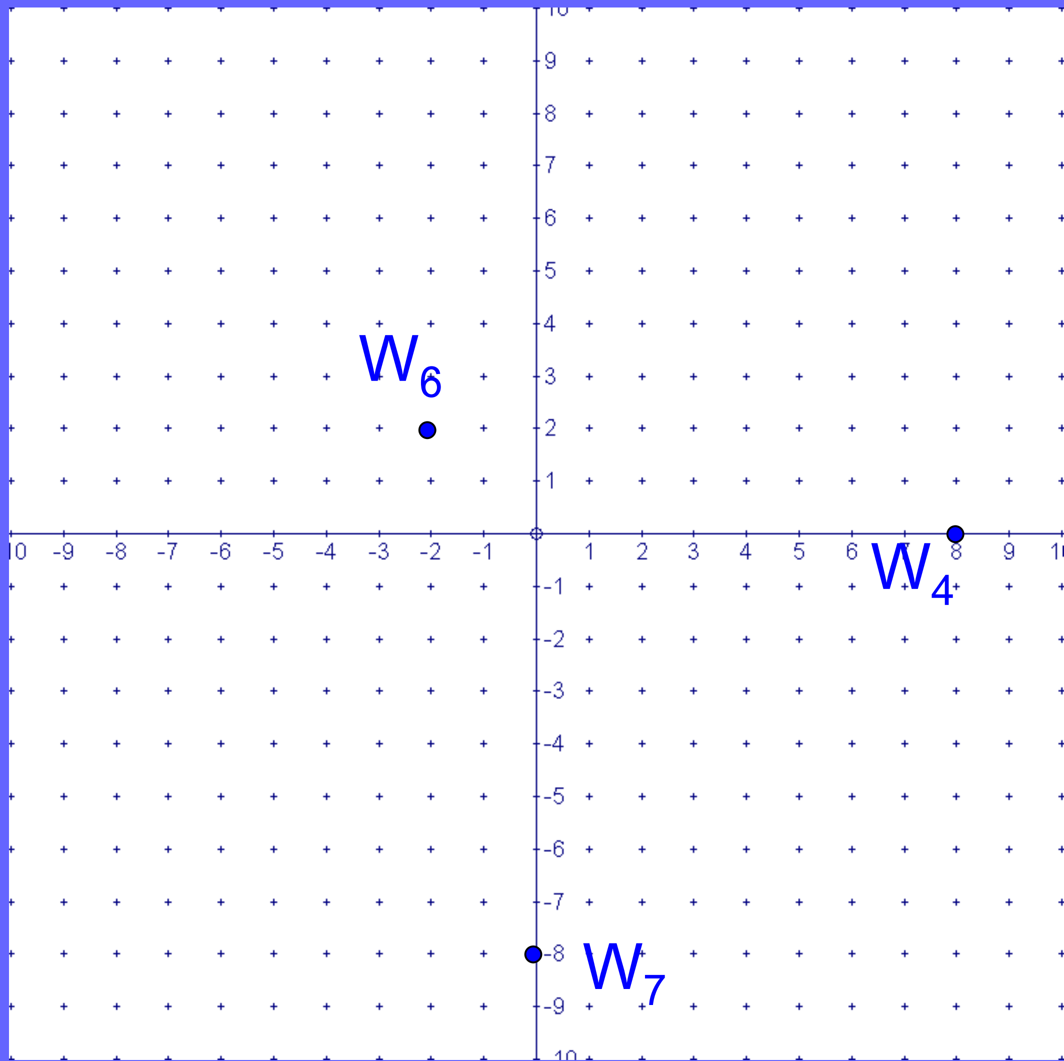


Die Funktion $w = f(z) = z^2 - 1$

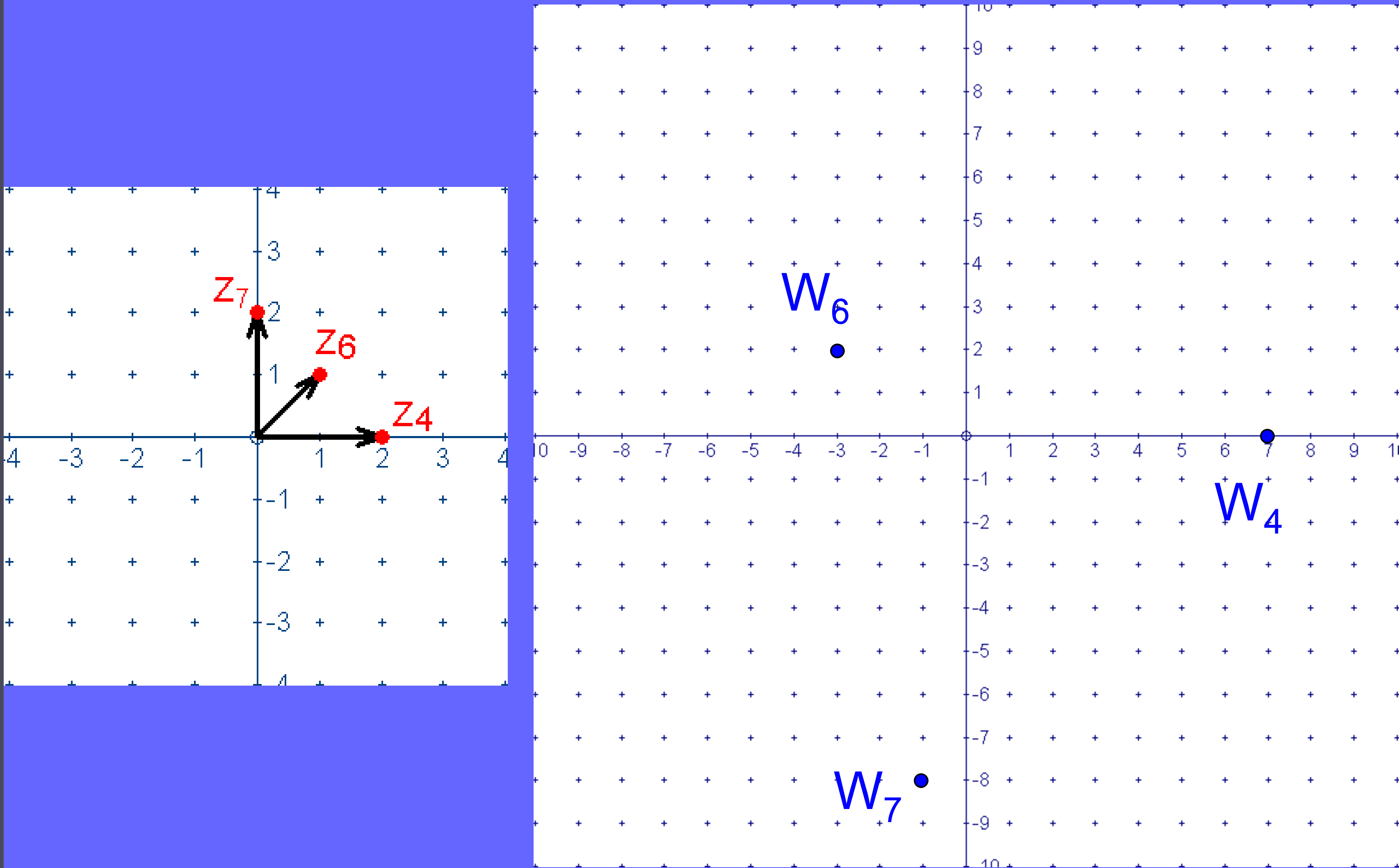


Die Funktion $w = f(z) = z^3$





Die Funktion $w = f(z) = z^3 - 1$



Die Nullstellen der Funktion $w = f(z) = z^3 - 1$

$$z^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = 1$$

Ansatz :

$$z = \alpha + \beta i \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$z^3 = (\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) = 1 \\ \beta(3\alpha^2 - \beta^2) = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = 0 \ \vee \beta^2 = 3\alpha^2$$

1. Fall $\beta = 0 \ \Rightarrow \alpha = 1$

$Z_{01} = 1 + 0i$ ist eine Nullstelle

Die Nullstellen der Funktion $w = f(z) = z^3 - 1$

$$\begin{bmatrix} \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) = 1 \\ \beta(3\alpha^2 - \beta^2) = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = 0 \ \vee \ \beta^2 = 3\alpha^2$$

1. Fall $\beta^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow \beta = \pm\sqrt{3\alpha^2}$

$$\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) = 1 \Leftrightarrow -8\alpha^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

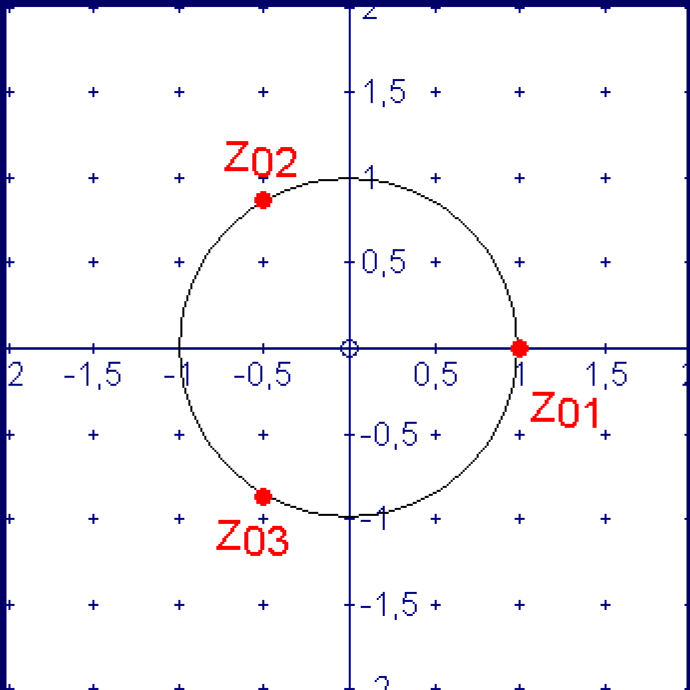
$$\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

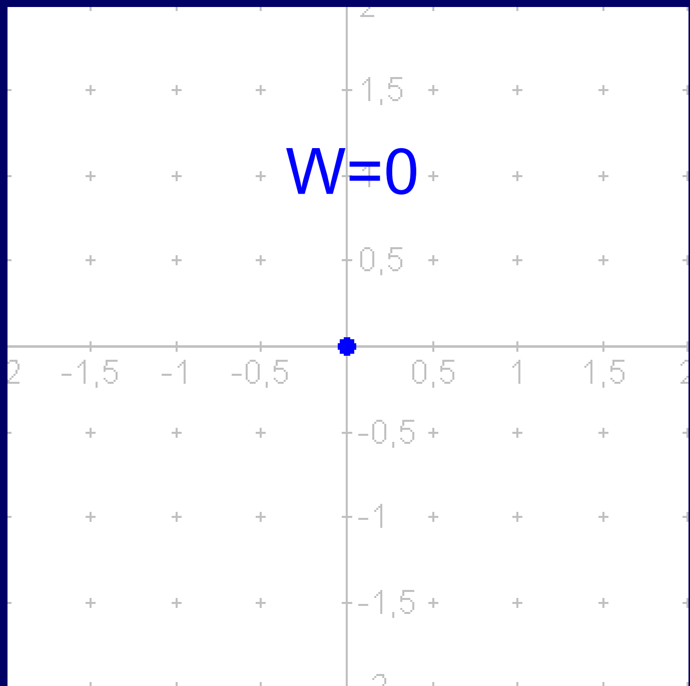
$z_{02} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $z_{03} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

sind die weiteren Nullstellen

Die Nullstellen der Funktion $w = f(z) = z^3 - 1$

$$z_{01} = 1 \qquad z_{02} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad z_{03} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$





Mit Derive $w = f(z) = z^3 - 1$

Algebra 2 Newton_Verfahren_Komplex.dfw

#1: $f(z) := z^3 - 1$

#2: $\frac{d}{dz} f(z) := z^3 - 1$

#3: $3 \cdot z^2$

#4: $z0 := 5 + 4.8 \cdot î$

#5: schritte := 12

#6: $\text{ITERATES}\left(z - \frac{f(z)}{3 \cdot z^2}\right)$

#7: $\text{ITERATES}\left(z - \frac{f(z)}{3 \cdot z^2}, z, z0, \text{schritte}\right)$

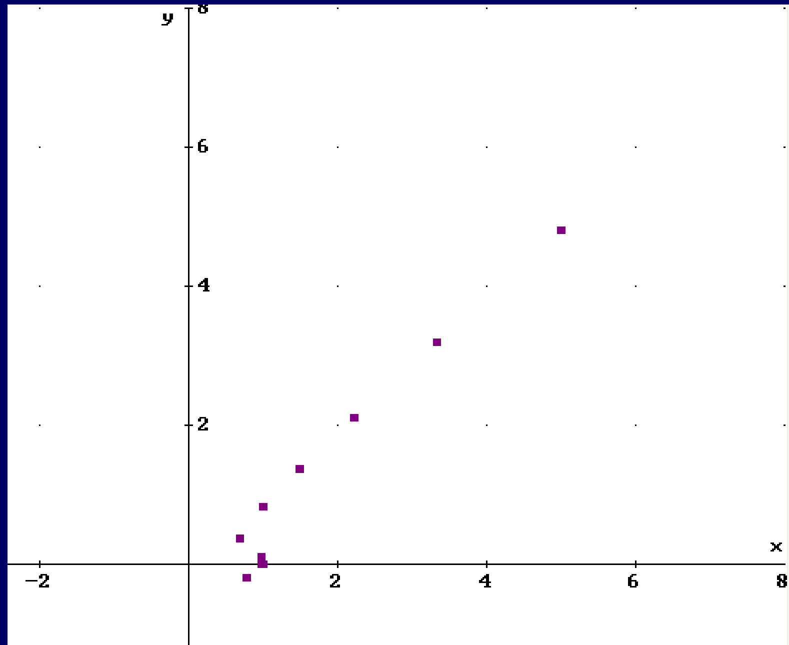
#9: PF := [5 + 4.8·î, 3.333333333 + 3.190476190·î, 2.222222222 + 2.110465116·î, 1.482758620 + 1.370370370·î, 0.9955752212 + 0.8322147651·î, 0.6989247311 + 0.36·î, 0.7794117647 − 0.1987951807·î, 0.9714285714 + 0.1143375680·î, 0.9871794871 − 0.005131494547·î, 1 + 0.0001539408866·î, 1 − $2.370144521 \cdot 10^{-8}$·î, 1, 1]

Mit Derive $w = f(z) = z^3 - 1$

```
       PKTE := VECTOR([(RE(PF))_i , (IM(PF))_i], i, 1, schritte)
#10:
```

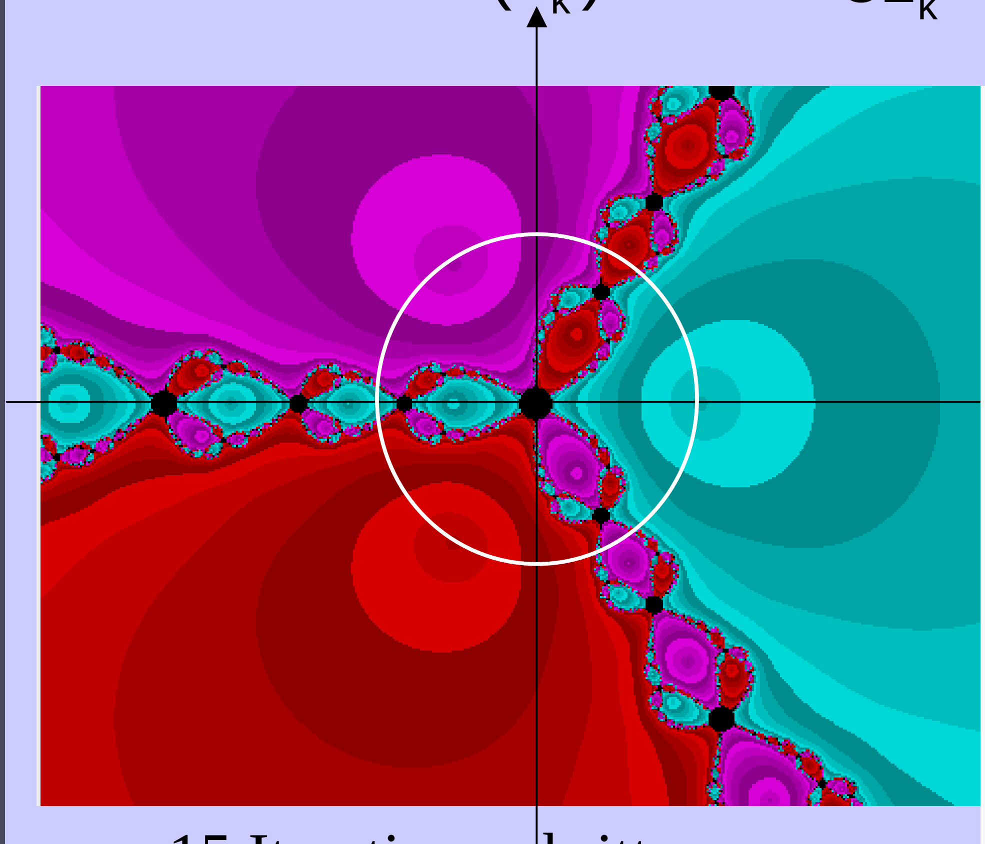
#11:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4.8 \\ 3.3 & 3.1 \\ 2.2 & 2.1 \\ 1.4 & 1.3 \\ 0.99 & 0.83 \\ 0.69 & 0.36 \\ 0.77 & -0.19 \\ 0.97 & 0.11 \\ 0.98 & -0.0051 \\ 1 & 0.00015 \\ 1 & -2.3\cdot 10^{-8} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Die Newton-Iteration $w = f(z) = z^3 - 1$

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} = \frac{4z_k^3 + 1}{3z_k^2}$$

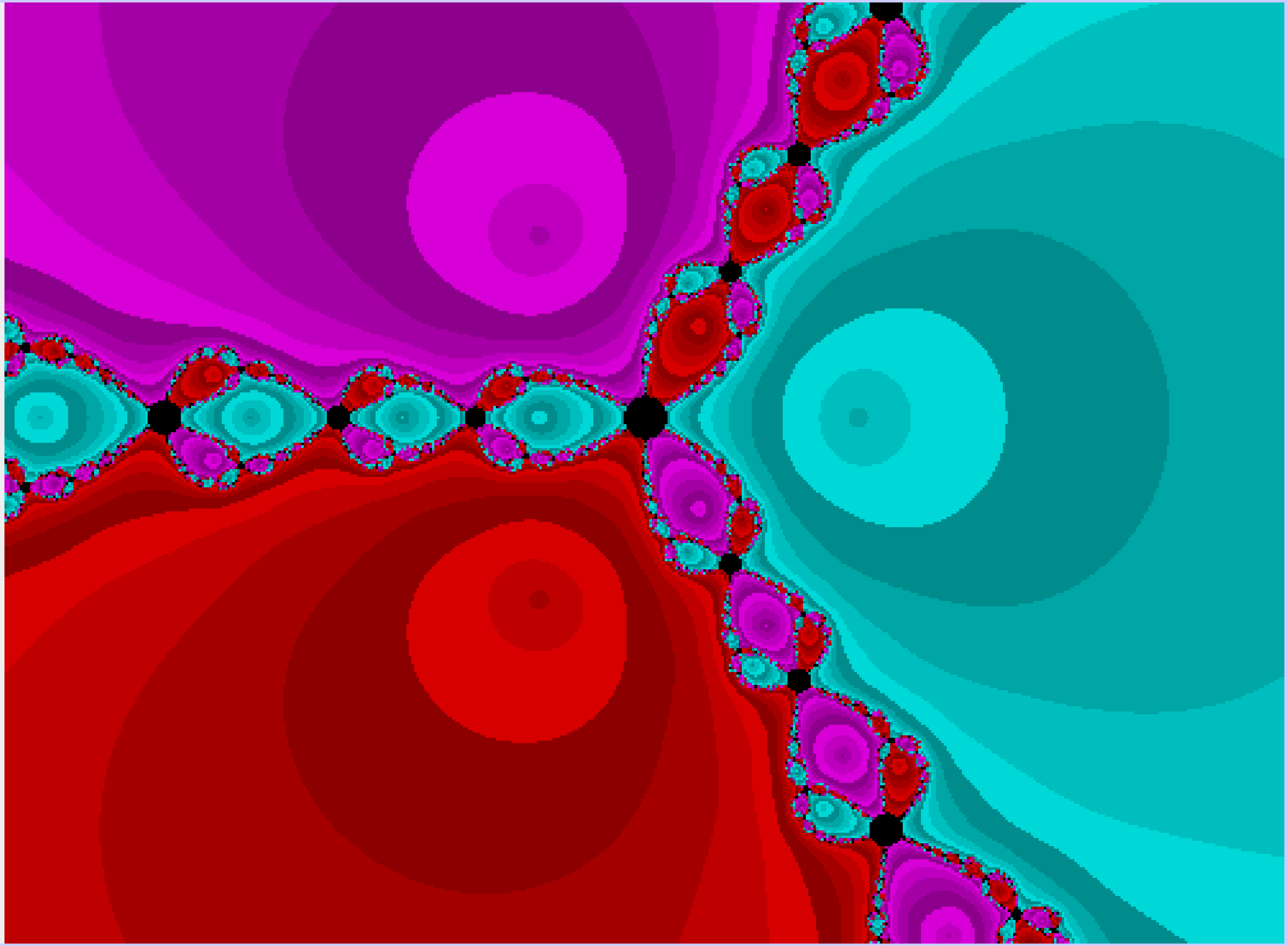


15 Iterationsschritte

Jeder Punkt der z-Ebene kann als Startwert für z_0 gewählt werden.

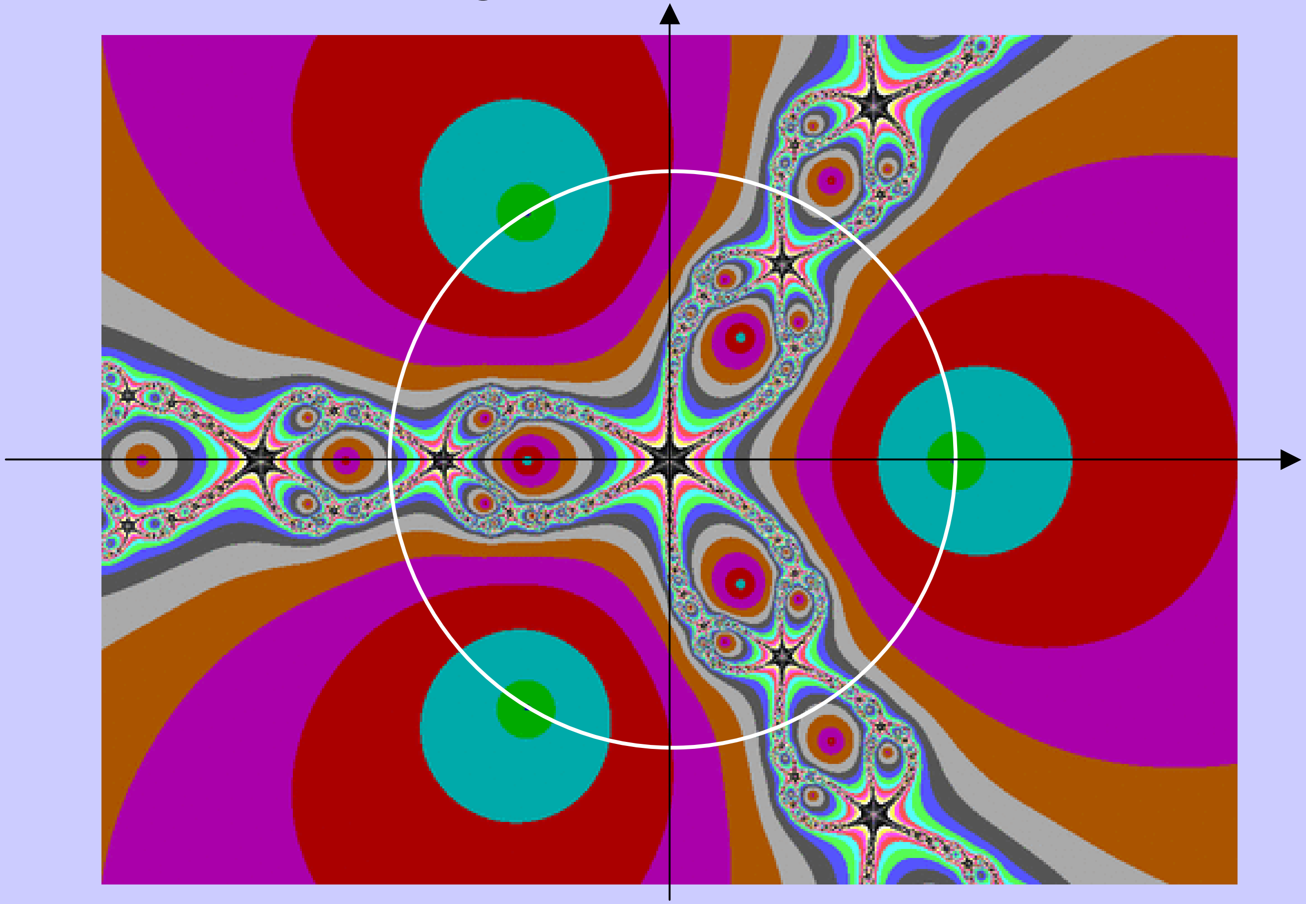
Er erhält die gleiche Farbe, wie die Nullstelle, gegen die die Folge der Iterationswerte dann konvergiert. Bei schwarzen Punkten kann keine Aussage gemacht werden.

Die Newton-Iteration $w = f(z) = z^3 - 1$



Die Newton-Iteration $w = f(z) = z^3 - 1$

In diesem Fraktal haben alle Punkte die gleiche Farbe, die nach gleich vielen Iterationsschritten gegen eine der Nullstellen konvergieren.



Die Newton-Iteration $w = f(z) = z^5 - 1$

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$$