Die imaginäre Einheit

Motivation : Die Gleichungen

$$x^2 = -5 = (-1) \cdot 5 \qquad (x-2)^2 = -3 = (-1) \cdot 3$$

sind in $\mathbb{R}$ nicht lösbar

Grund : $\sqrt{-1}$ in $\mathbb{R}$ nicht definiert

Definition :

$$\sqrt{-1} = i$$

„imaginäre Einheit“ mit der Eigenschaft $i^2 = -1$

Bemerkung : $i \notin \mathbb{R}$

Die imaginäre Einheit

Die Gleichungen

$$x^2 = -5 = (-1) * 5 \qquad (x-2)^2 = -3 = (-1) \cdot 3$$

hätten dann die formalen Lösungen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{(-1)\cdot 5} \qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{(-1)\cdot 3}$$

und wenn wir verlangen, dass auch hier die Wurzelgesetze gelten :

$$x_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{5} \qquad x_{1,2} = 2 \pm i \cdot \sqrt{3}$$

Die imaginären „Zahlen“

Definition : Objekte der Form

$$r \cdot i \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R}$$

heißen imaginäre „Zahlen“ .

$$\mathbb{I} = \left\{ r \cdot i \mid r \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1} \right\}$$

ist die Menge der imaginären „Zahlen“

Bemerkung: Diese Objekte haben das Prädikat „Zahlen“ erst verdient, wenn wir damit rechnen können.

Definition : Für die multiplikative Verknüpfung gilt

$$r \cdot i = i \cdot r \quad \text{für alle} \quad r \in \mathbb{R}$$

Die komplexen „Zahlen“

Definition : Objekte der Form

$$a + b \cdot i \quad \text{mit} \quad a,b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}$$

heißen komplexe „Zahlen“ .

$$\mathbb{C} = \left\{ z \mid \; z = a + b \cdot i \mid a,b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1} \right\}$$

ist die Menge der komplexen „Zahlen“

Bemerkung: Diese Objekte haben das Prädikat „Zahlen“ ebenfalls erst verdient, wenn wir damit rechnen können.

Definition : Für die addititive Verknüpfung gilt

$$a + b \cdot i = b \cdot i + a \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}$$

Die Gleichheit komplexer Zahlen

Seien $z_1; z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$

Definition : $$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

Komplexe Zahlen sind also gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteilen übereinstimmen.

Beispiele für komplexe „Zahlen“

Weiter vereinbaren wir auch hier „Punktrechnung vor Strichrechnung“ :

$$a+b\cdot i=a+(b\cdot i)$$

$2+3\cdot i$ $\quad -\frac{1}{3}+\frac{3}{8}\cdot i$ $\quad (1-\sqrt{5})+\sqrt{2}\cdot i$ $\quad 0+0\cdot i$

$1+1\cdot i$ $\quad 2-3\cdot i \;=2+(-3)\cdot i$

Definition : Die komplexe Zahl $z^{*}=a-b\cdot i=a+(-b)\cdot i$

heißt konjugiert komplex zu $z=a+b\cdot i$

Die Addition komplexer „Zahlen“

Definition :

$$(a+b\cdot i)\oplus(c+d\cdot i)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

für alle komplexen Zahlen

Die Summe zweier komplexer Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl !

Damit wir komplexe Zahlen nach den selben Regeln addieren können, wie wir das in $\mathbb{R}$ gewohnt sind, verlangen wir, dass $(\mathbb{C},\oplus)$ eine kommutative Gruppe ist.

Definition einer Gruppe

Sei M eine Menge und $*$ eine Verknüpfung, die für je zwei beliebige Elemente $a,b \in M$ definiert ist.

$(M,*)$ heißt Gruppe, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

G1) $a * b \in M$ für alle $a,b \in M$ „Abgeschlossenheit“

G2) $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a,b,c \in M$ „AG“

G3) Für jedes $a \in M$ existiert ein neutrales Element n derart, dass $a * n = a$ „NE“

G4) Für jedes $a \in M$ existiert ein inverses Element $\bar{a} \in M$ derart, dass $\bar{a} * a = n$ ist. „IE“

Kommutative Gruppe

G5) $a * b = b * a$ für alle $a, b, c \in M$ „KG“

Gilt zusätzlich zu G1-G4 das Kommutativgesetz, dann heißt die Gruppe $(M, *)$

kommutative oder Abelsche Gruppe.

Begründe, ob folgende Mengen mit der angegebenen Verknüpfung Gruppen sind :

$$(\mathbb{Z}, +) \quad (\mathbb{Z}, \cdot) \quad (\mathbb{Q}, +) \quad (\mathbb{Q}, \cdot)$$

Die Abgeschlossenheit von $(\mathbb{C},\oplus)$

Beh.: Für alle $z_1\ ,\ z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $z_1 \oplus z_2 \in \mathbb{C}$

Beweis: Seien $z_1 = a + b \cdot i$ und $z_2 = c + d \cdot i \ \in \mathbb{C}$

$$(a+b\cdot i) \oplus (c+d\cdot i) = \underbrace{\underbrace{(a+c)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(b+d)}_{\in\mathbb{R}}\cdot i}_{\in\mathbb{C}}$$

Die Abgeschlossenheit ist damit eine Folge der Abgeschlossenheit von $(\mathbb{R},+)$

Das Assoziativgesetz in $(\mathbb{C}, \oplus)$

Beh.: Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt $(z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 = z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3)$

Seien $z_1, z_2, z_3, \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = a + b \cdot i$; $z_2 = c + d \cdot i$; $z_3 = e + f \cdot i$

$(z_1 \quad \oplus \quad z_2) \quad \oplus \quad z_3 \quad =$

$((a + b \cdot i) \oplus (c + d \cdot i)) \oplus (e + f \cdot i) =$

$((a + c) + (b + d) \cdot i)) \oplus (e + f \cdot i) =$ Def. von $\oplus$

$(((a + c) + e) + ((b + d) + f) \cdot i)) =$ Def. von $\oplus$

$((a + (c + e)) + (b + (d + f)) \cdot i)) =$ AG in $\mathbb{R}$

$(a + b \cdot i) \oplus ((c + d \cdot i) \oplus (e + f \cdot i)) =$ Def von $\oplus$

$z_1 \quad \oplus \quad (z_2 \quad \oplus \quad z_3) \quad =$

Das neutrale Element in $(\mathbb{C},\oplus)$

Beh.: $n = 0 + 0 \cdot i$ ist das neutrale Element in $(\mathbb{C},\oplus)$

Beweis: Sei z= $\in \mathbb{C}$ beliebig mit $z = a + b \cdot i$

$$n \oplus z =$$

$$(0 + 0 \cdot i) \oplus (a + b \cdot i) =$$

$$((0 + a) + (0 + b) \cdot i \quad =$$

$$a + b \cdot i =$$

$$z$$

Das inverse Element in $(\mathbb{C},\oplus)$

Beh.: $\bar{z}=(-a)+(-b)\cdot i$ ist das zu $z=a+b\cdot i$ inverse Element in $(\mathbb{C},\oplus)$

Beweis: Sei $z=a+b\cdot i\in\mathbb{C}$ beliebig

$$z\oplus\bar{z}=$$

$$(a+b\cdot i)\oplus((-a)+(-b)\cdot i)=$$

$$((a+(-a))+(b+(-b))\cdot i=$$

$$(a+(-a))+(b+(-b))\cdot i=$$

$$0+0\cdot i=$$

n

Das Kommutativgesetz in $(\mathbb{C},\oplus)$

Beh.: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1$

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = a + b \cdot i \,;\; z_2 = c + d \cdot i$

$$z_1 \oplus z_2 =$$

$$(a + b \cdot i) \oplus (c + d \cdot i) =$$

$$(a + c) + (b + d) \cdot i = \qquad \text{Def. von } \oplus$$

$$(c + a) + (d + b) \cdot i = \qquad \text{KG in } \mathbb{R}$$

$$(c + d \cdot i) + (a + b \cdot i) = \qquad \text{Def von } \oplus$$

$$z_2 \oplus z_1 =$$

Die Subtraktion komplexer Zahlen

Definition :

$$z_1 - z_2 = z_1 \oplus \bar{z}_2$$

für alle komplexen Zahlen

Bemerkung: Da zu jedem $z \in \mathbb{C}$ das additiv inverse Element $\bar{z} \in \mathbb{C}$ existiert, ist die Differenz immer definiert !

Bezeichnet man das additiv inverse Element $\bar{z}_2 = (-z)$

dann ergibt sich

$$z_1 - z_2 = z_1 \oplus (-z_2)$$

Die Multiplikation komplexer „Zahlen“

Definition :

$$(a+b\cdot i)\odot(c+d\cdot i)=(a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot i$$

für alle komplexen Zahlen

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl !

Damit wir komplexe Zahlen nach den selben Regeln multiplizieren können, wie wir das in $\mathbb{R}$ gewohnt sind, verlangen wir, dass $\left(\mathbb{C}^*,\odot\right)$ eine kommutative Gruppe ist.

$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{n\}$ n ist das neutrale Element in $(\mathbb{C},\oplus)$

Das Assoziativgesetz in $(\mathbb{C},\odot)$

Beh.: Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ **gilt** $(z_1 \odot z_2) \odot z_3 = z_1 \odot (z_2 \odot z_3)$

Seien $z_{1,} z_{2,} z_{3,} \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = a + b \cdot i$; $z_2 = c + d \cdot i$; $z_3 = e + f \cdot i$

$$z_1 \odot (z_2 \odot z_3) =$$

$$((a + b \cdot i) \odot (c + d \cdot i)) \odot (e + f \cdot i) =$$

$$((ac - bd) + (ad + bc) \cdot i)) \odot (e + f \cdot i) = \qquad \odot$$

$$((ac - bd)e - (ad + bc)f) + ((ad + bc)e + (ac - bd)f)i = \qquad \odot$$

$$(a(ce - cf) - b(cf + de)) + (\ a(cf + de) + b(ce - df)\ )i = \qquad \text{AG in } \mathbb{R}$$

$$(a + bi) \odot (\ (ce - df) + (cf + de)i\ ) = \qquad \odot$$

$$(a + bi)(\ (c + di) \odot (e + fi)\ ) = \qquad \odot$$

$$z_1 \odot (z_2 \odot z_3)$$

Das neutrale Element in $(\mathbb{C},\odot)$

Beh.: $n = 1 + 0 \cdot i$ ist das neutrale Element in $(\mathbb{C},\odot)$

Beweis: Sei z= $\in \mathbb{C}$ beliebig mit $z = a + b \cdot i$

$$n \odot z =$$

$$(1 + 0 \cdot i) \odot (a + b \cdot i) =$$

$$(1a - 0b) + (0a + 1b) \cdot i =$$

$$a + b \cdot i =$$

$$z$$

Das inverse Element in $(\mathbb{C}^*,\odot)$

Beh.: $\overline{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\cdot i$ ist das zu $z = a + b\cdot i$ inverse Element in $(\mathbb{C}^*,\odot)$ $a \neq 0$ oder $b \neq 0$

Beweis: Sei $z = a + b\cdot i \in \mathbb{C}$ beliebig

$$z \odot \overline{z} =$$

$$(a+b\cdot i)\odot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\cdot i\right) =$$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \left(\frac{ba}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)\cdot i =$$

$$1 + 0\cdot i =$$

n

Das inverse Element in $(\mathbb{C}^*,\odot)$

Jedes Element in $\mathbb{C}$ außer dem neutralen Element der Addition besitzt ein inverses Element.

Deswegen ist $(\mathbb{C},\odot)$ keine Gruppe, sondern nur $(\mathbb{C}^*,\odot)$

Häufig bezeichnet man das multiplikativ inverse Element $\overline{z}$

mit z^{-1} oder mit $\frac{1}{z}$

Das Kommutativgesetz in $(\mathbb{C}, \odot)$

Beh.: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $z_1 \odot z_2 = z_2 \odot z_1$

Seien $z_1, z_2, \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = a + b \cdot i \; ; \; z_2 = c + d \cdot i$

$$z_1 \odot z_2 =$$

$$(a + b \cdot i) \odot (c + d \cdot i) =$$

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = \qquad \text{Def. von } \odot$$

$$(ca - db) + (da + cb)i = \qquad \text{KG in } \mathbb{R}$$

$$(c + d \cdot i) \odot (a + b \cdot i) = \qquad \text{Def von } \odot$$

$$z_2 \oplus z_1$$

Das Distributivgesetz in $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$

Für alle $z_1;z_2;z_3 \in \mathbb{C}$ gilt :

$$z_1 \odot (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \odot z_2) \oplus (z_1 \odot z_3)$$

$$= z_1 \odot z_2 \oplus z_1 \odot z_3$$

Seien $z_1, z_2, z_3, \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = a + b \cdot i$; $z_2 = c + d \cdot i$; $z_3 = e + f \cdot i$

$$z_1 \odot (z_2 \oplus z_3) =$$

$$(a+bi) \odot ((c+e)+(d+f)i) =$$

$$(a(c+e) - b(d+f)) + (a(d+f) + (b(c+e))i =$$

$$(ac+ae) - bd - bf)) + ((ad+af) + (bc+be))i =$$

$$((ac-bd)+(ae-bf)) + ((ad+bc)+(af+be))i =$$

$$(\ (ac-bd)+(ad+bc)i\ ) \oplus (\ (ae-bf)) + (af+be)\ )i =$$

$$(z_1 \odot z_2) \oplus (z_1 \odot z_3)$$

$$= z_1 \odot z_2 \oplus z_1 \odot z_3$$

Der komplexe Körper $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$

1.) $(\mathbb{C},\oplus)$ ist eine K-Gruppe

2.) $(\mathbb{C}^*,\odot)$ ist eine K-Gruppe

3.) Es gilt das Distributivgesetz in $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$

Ab sofort schreiben wir für $\oplus,\odot$ nur noch $+,\cdot$

Die Division komplexer Zahlen

Definition :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \odot \frac{1}{z_2} \quad \text{für alle } z_1 \in \mathbb{C} \text{ und } z_2 \in \mathbb{C}^*$$

Bemerkung: Da zu jedem $z \in \mathbb{C}^*$ das multiplikativ inverse

Element $\overline{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ existiert, ist der Quotient immer definiert !

Die konjugiert komplexe Zahl in $(\mathbb{C},\oplus)$

Definition: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z=a+bi$ heißt die Zahl $z^*=a-bi$ die konjugiert komplexe Zahl.

Der Betrag einer komplexen Zahl

Definition :

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + bi$ gilt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Bemerkung : $|z| \in \mathbb{R}_0^+$

Die Wurzel einer komplexen Zahl

Definition :

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + bi$ versteht man unter $\sqrt{z}$ diejenigen komplexen Zahlen für die

$$\left(\sqrt{z}\right)^2 = z \text{ gilt.}$$

Beispiel 1

$$\sqrt{-15-8i} = \alpha + \beta i$$

$$\Rightarrow \quad -15-8i = (\alpha^2 - \beta^2) + (2\alpha\beta)i$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{r} \alpha^2 - \beta^2 = -15 \\ 2\alpha\beta = -8 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow (\alpha = 1 \wedge \beta = -4) \vee (\alpha = -1 \wedge \beta = 4)$$

$$\sqrt{-15-8i} = 1 - 4i \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{-15-8i} = -1 + 4i$$

Die Wurzel einer komplexen Zahl

Beispiel 2 $\sqrt{-15} = \sqrt{-15+0\mathrm{i}} = \alpha + \beta \mathrm{i}$

$$\Rightarrow \quad -15 = (\alpha^2 - \beta^2) + (2\alpha\beta)\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{matrix} \alpha^2 - \beta^2 = -15 \\ 2\alpha\beta = 0 \end{matrix} \right|$$

$$2\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$$

$$1.\text{Fall}: \alpha = 0 \ \Rightarrow -\beta^2 = -15 \Rightarrow \beta = \pm\sqrt{15}$$

$$\text{d.h. } \sqrt{-15} = 0 + \sqrt{15}\,\mathrm{i} \ \vee \ \sqrt{-15} = 0 + \sqrt{15}\,\mathrm{i}$$

$$2.\text{Fall}: \beta = 0 \ \Rightarrow \alpha^2 = -15 \Rightarrow \text{keine Lösung, weil } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{-15} = 0 + \sqrt{15}\,\mathrm{i} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{-15} = 0 - \sqrt{15}\,\mathrm{i}$$

Quadratische Gleichungen

$az^2 + bz + c = 0 \;\; ; \; a \neq 0$ hat die Lösungen

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z^2 + (2i - 3)z + (5 - i) = 0$$

Mit $a = 1 \; ; \; b = 2i - 3 \;\; c = 5 - i$ hat man

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot 1} = \frac{-(2i - 3) \pm \sqrt{(2i - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - i)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{(3 - 2i) \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2 \cdot 1} = \frac{(3 - 2i) \pm (1 + 4i)}{2 \cdot 1} = \frac{(3 - 2i) \pm (1 + 4i)}{2 \cdot 1}$$

$$\mathbb{L} = \{ \; 2 - 3i \; ; 1 + i \; \}$$