Vollständige Induktion - Die Bernoullische Ungleichung

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $n \geq 2$ und $x > 0$
gilt :

$$(1+x)^n > 1+n \cdot x$$

Beweis durch vollständige Induktion :

Verankerung: Die Behauptung ist richtig für n=2

$$(1+x)^2 > 1+2 \cdot x$$

denn $(1+x)^2 = 1+2 \cdot x + x^2 > 1+2 \cdot x$ weil $a^2>0$ ist.
Hier wird die Voraussetzung $x \neq 0$ gebraucht !

Induktionsannahme: Die Behauptung ist richtig für ein beliebiges k mit $k \geq 2$
d.h.

$$(1+x)^k > 1+k \cdot x$$

Induktionsschluss: Die Beh. ist unter dieser Voraussetzung auch für k+1 richtig

z.z. $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1) \cdot x$

Beweis:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k \cdot (1+x) \\ &> (1+kx) \cdot (1+x) \\ &= 1+x+kx+kx^2 \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \\ &> 1+(k+1)x\end{aligned}$$

weil $kx^2>0$

✓