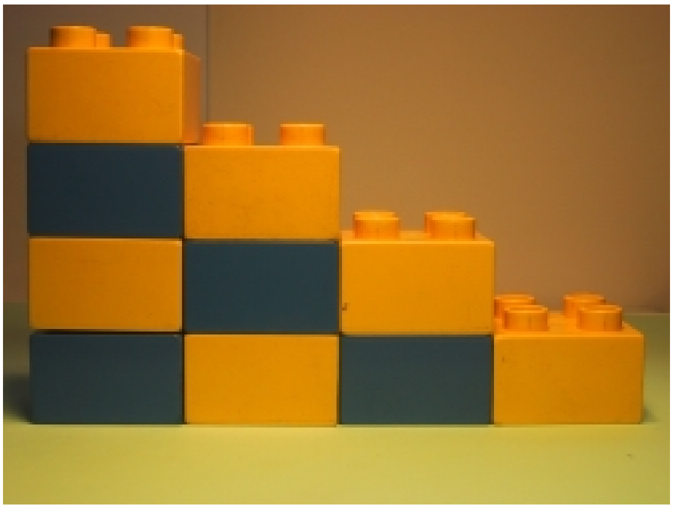
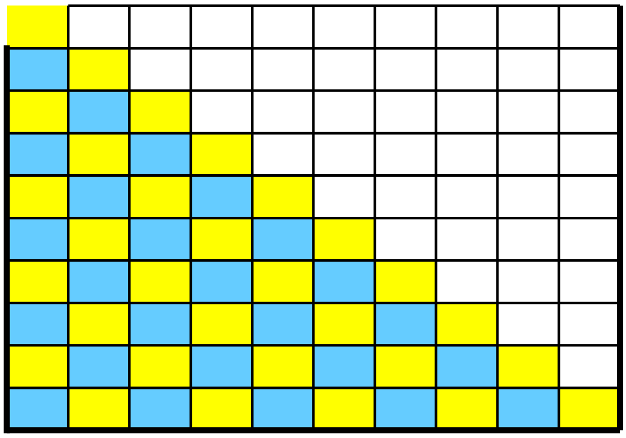
Die Dreieckzahlen (Gauß-Zahlen)

Wie viele Steine bilden das nebenstehende Dreieck ?



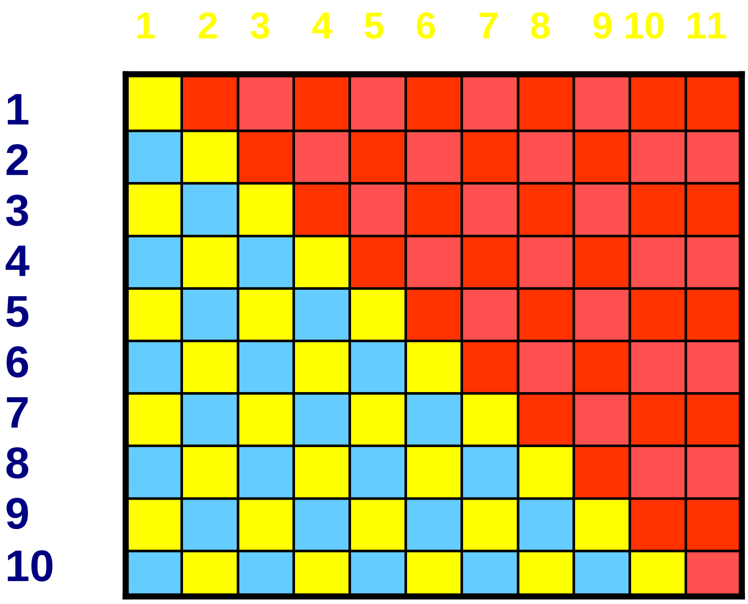
N_4=1+2+3+4 = 10

Wie viele Steine bilden das nebenstehende Dreieck ?



Lösungsidee:
(Der Trick von Gauß)

Zwei Dreiecke bilden ein Rechteck !



$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+9+10=\frac{10\cdot 11}{2}=55$$

Verallgemeinerung:

Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt :

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Beweis durch vollständige Induktion :

Verankerung für n=1: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ✓

Induktionsannahme: Die Aussage ist richtig für ein beliebiges $k\in\mathbb{N}$
d.h.

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

Induktionsschluss: z.z. Die Aussage ist (unter dieser Voraussetzung) auch richtig für k+1 :

d.h. $1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2}$

Beweis: $1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+k+(k+1)$

$$=1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+k+(k+1)$$

$$=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]$$

$$=(k+1)\left[\frac{k+2}{2}\right]=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ ✓