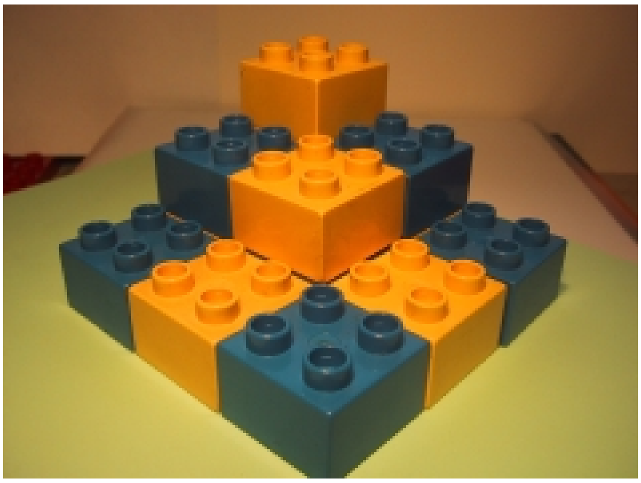
Die Pyramidenzahlen

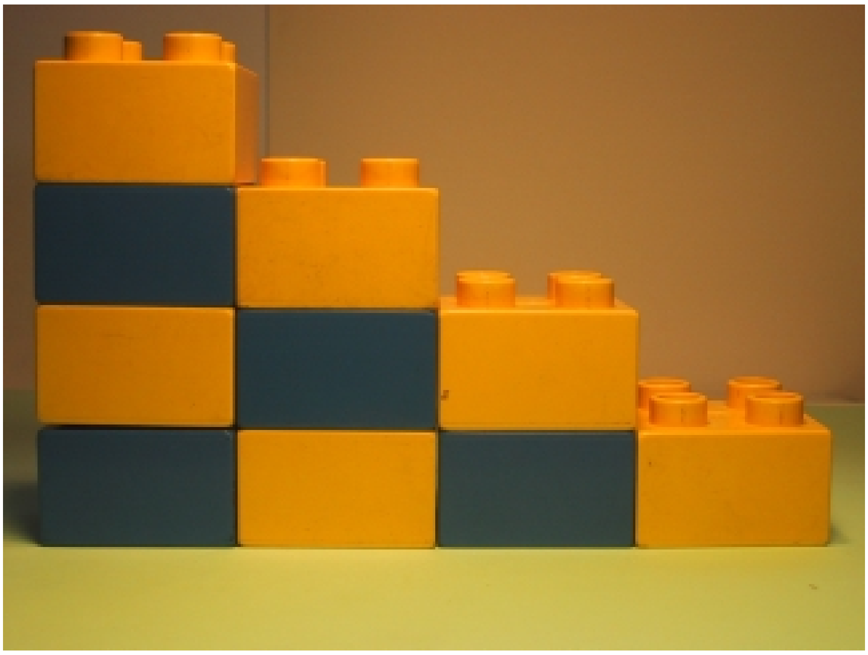
Wie viele Steine bilden die untenstehende Pyramide ?



$$N_3=1+4+9 = 1^2+2^2+3^2=14$$

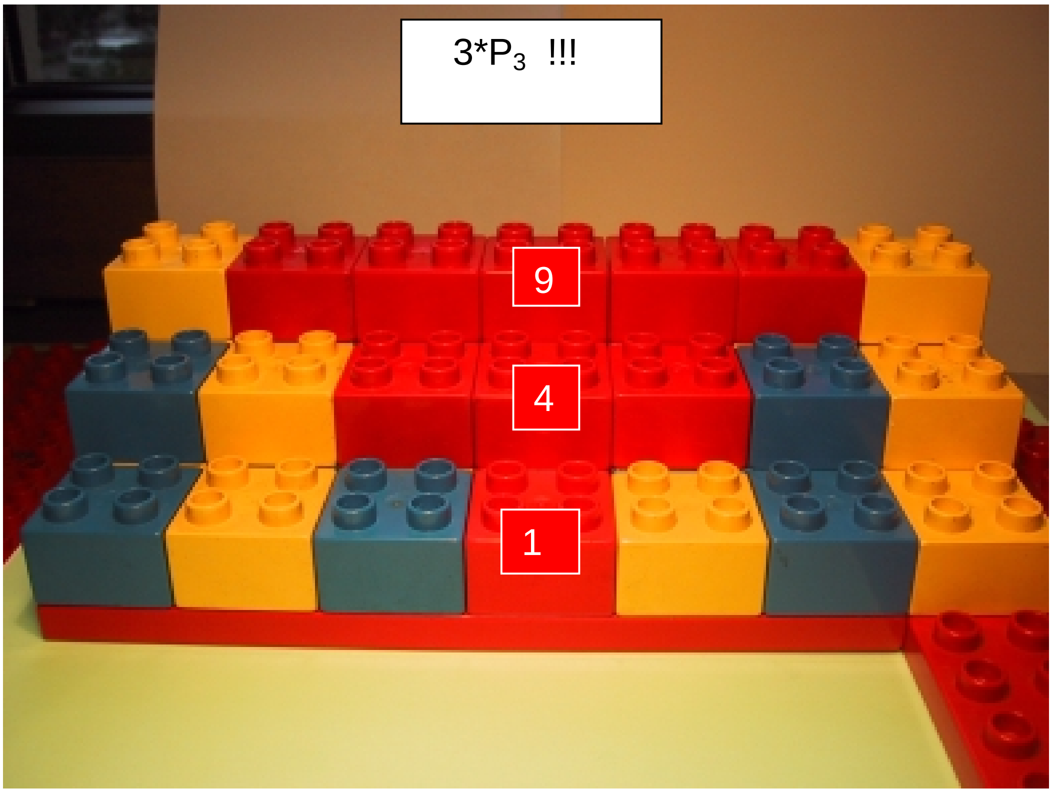
Wie kommt man hier auf eine Formel ?

Lösungsidee : Man sieht Gaußsche Dreieckzahlen :

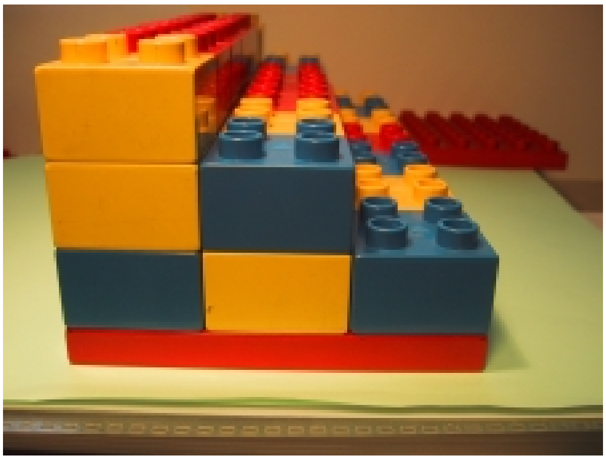


und baut eine Treppe :

$$2 \cdot P_3 = 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = 2 \cdot 14 = 28$$



$$\boxed{3 \cdot P_3 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) = 3 \cdot 14 = 42}$$

$$3 \cdot P_3 = (1+2+3) \cdot (3+1+3)$$

und damit:

$$P_3 = \frac{(1+2+3) \cdot (3+1+3)}{3}$$

Verallgemeinerung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1))}{6}$$

Beweis durch vollständige Induktion :

Verankerung für n=1: $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6}$ ✓

Induktionsannahme: Die Aussage ist richtig für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ d.h.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1)(2k+1)}{6}$$

Induktionsschluss: z.z. Die Aussage ist (unter dieser Annahme) auch richtig für k+1 :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)\cdot(k+2)(2(k+1)+1))}{6}$$

d.h. z.z. $$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)\cdot(k+2)(2k+3)}{6}$$

Beweis: $$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+k^2+(k+1)^2$$

$$= 1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+k^2+(k+1)^2$$

$$= \frac{k\cdot(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$= (k+1)\cdot\frac{k\cdot(2k+1)+6\cdot(k+1)}{6}$$

$$= (k+1)\cdot\frac{2k^2+k+6k+6}{6} = (k+1)\cdot\frac{2k^2+7k+6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)(2k+3)}{6}$$ ✓