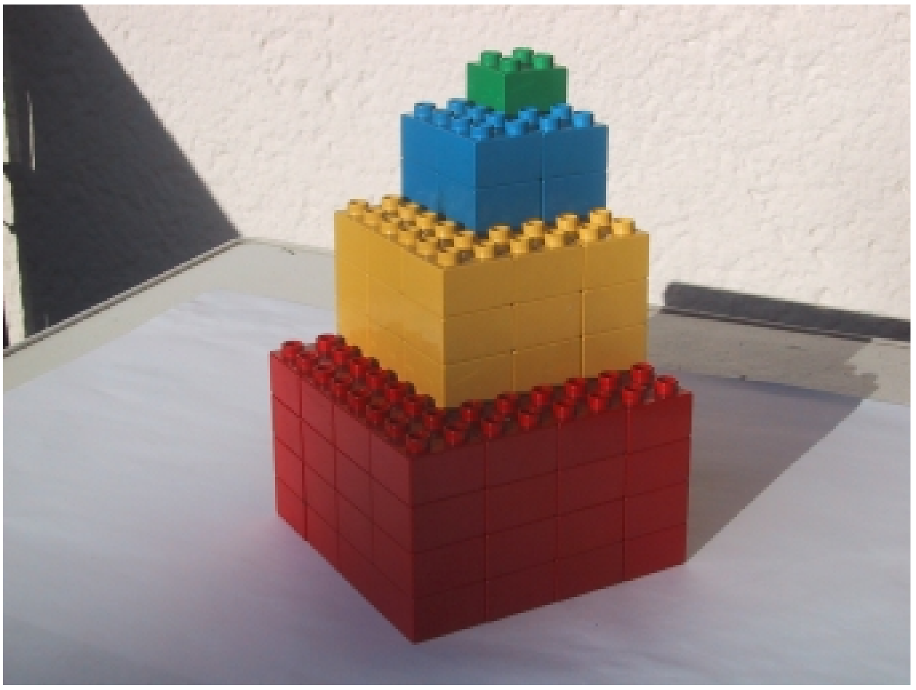
Die Pyramidenzahlen2

Wie viele Steine bilden die untenstehende Pyramide ?



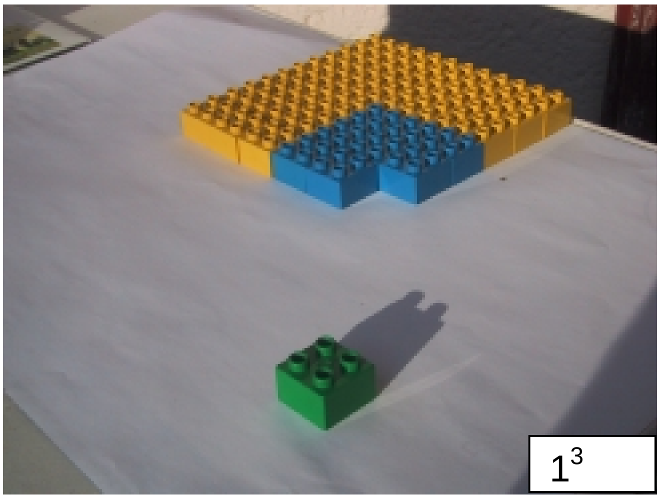
Wie kommt man hier auf eine Formel ?

Lösungsidee : Zuerst einmal rechnen :

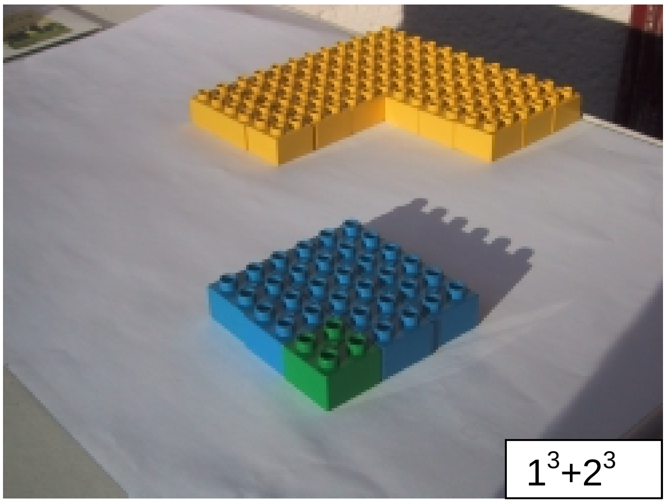
$P_1=1$
$P_2=1+8=9$
$P_3=1+8+27=36$
$P_4=1+8+27+64=100$

$P_1=1^3$
$P_2=1^3+2^3=9$
$P_3=1^3+2^3+3^3=36$
$P_4=1^3+2^3+3^3+4^3=100$

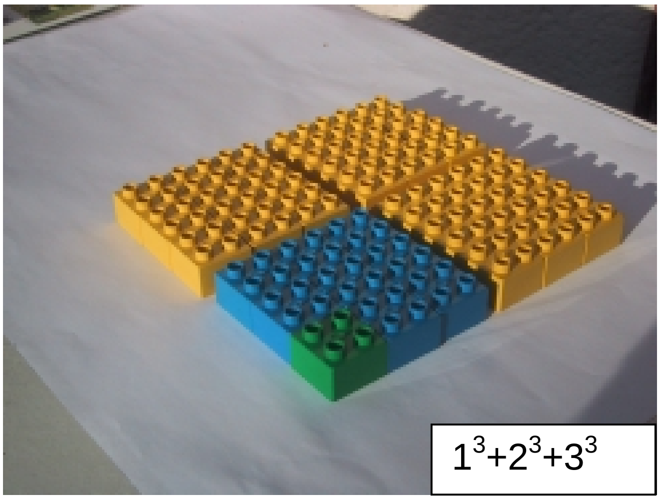
Vermutung: Mit allen diesen Steinen lassen sich immer Quadrate legen!



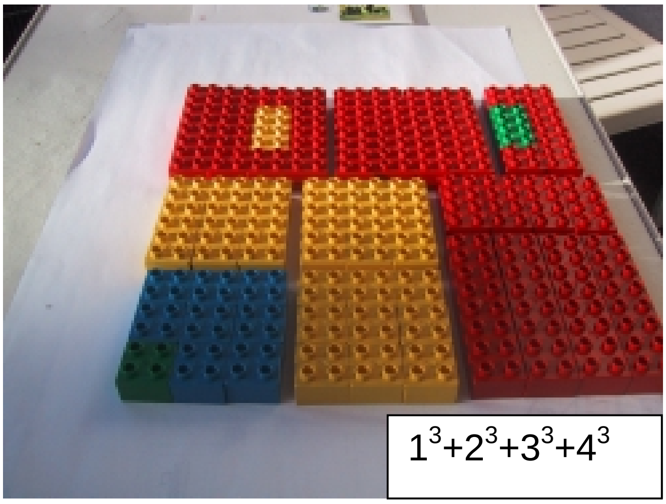
1^3



1^3+2^3



$1^3+2^3+3^3$



$1^3+2^3+3^3+4^3$

Man sieht sofort:

$$P_4=1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2=100$$

Vermutung :

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P_n=1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+n^3=(1+2+3+4+\ldots+n)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

Beweis durch vollständige Induktion :

Verankerung für n=1: $1^3 = (1)^2$ ✓

Induktionsannahme: Die Aussage ist richtig für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

d.h. $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+k^3=(1+2+3+4+\ldots+k)^2$

Induktionsschluss: z.z. Die Aussage ist (unter dieser Annahme) auch richtig für k+1 :

$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+k^3+(k+1)^3$

$=(1+2+3+4+\ldots+k+(k+1))^2$

Beweis: $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+k^3+(k+1)^3$

$= 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+k^3+(k+1)^3$

$=(1+2+3+4+\ldots+k)^2+(k+1)^3$?

$= (1+2+3+4+\ldots+k+(k+1))^2$ ✓

Nebenrechnung :

$(1+2+3+4+\ldots+k+(k+1))^2=((1+2+3+4+\ldots+k)+(k+1))^2$

$=(1+2+3+4+\ldots+k)^2+2(1+2+3+4+\ldots+k)(k+1)+(k+1)^2$

$= (1+2+3+4+\ldots+k)^2+2\frac{k(k+1)}{2}(k+1))+(k+1)^2$

$=(1+2+3+4+\ldots+k)^2+k\,(k+1)^2+(k+1)^2$

$=(1+2+3+4+\ldots+k)^2+(k+1)^2\,(k+1)$

$=(1+2+3+4+\ldots+k)^2+(k+1)^3$ ✓