Vollständige Induktion - Teilbarkeit Beispiel1

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt :

$$6 \mid (n^3 - n)$$

| ist gleichbedeutend mit „ist Teiler von“

Beweis durch vollständige Induktion :

Verankerung: Die Behauptung ist richtig für n=2

$$6 \mid (2^3 - 2)$$
$$6 \mid 6 \quad \checkmark$$

Induktionsannahme: Die Behauptung ist richtig für ein beliebiges k mit $k \geq 2$
d.h.

$$6 \mid (k^3 - k)$$

das ist gleichbedeutend mit $(k^3 - k) = 6 \cdot t$ mit $t \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss: Die Beh. ist unter dieser Voraussetzung auch für k+1 richtig

z.z. $$6 \mid ((k+1)^3 - (k+1))$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
((k+1)^3 - (k+1)) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\
&= k^3 + 3k^2 + 2k \\
&= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\
&= 6 \cdot t + 3 \cdot (2 \cdot r) \quad \text{noch zu zeigen!} \\
&= 6 \cdot t + 6 \cdot r \\
&= 6 \cdot (t + r) = 6 \cdot s \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Vollständige Induktion - Teilbarkeit Beispiel2

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt :

$$2 \mid (n^2 + n)$$

| ist gleichbedeutend mit „ist Teiler von"

Beweis durch vollständige Induktion :

Verankerung: Die Behauptung ist richtig für n=1

$$2 \mid (2^2 + 2)$$
$$2 \mid 6 \quad \checkmark$$

Induktionsannahme: Die Behauptung ist richtig für ein beliebiges k mit $k \geq 2$ d.h.

$$2 \mid (k^2 + k)$$

das ist gleichbedeutend mit $(k^2 + k) = 2 \cdot r$ mit $r \in \mathbb{N}$

Induktionsschluss: Die Beh. ist unter dieser Voraussetzung auch für k+1 richtig

z.z. $2 \mid ((k+1)^2 + (k+1))$

Beweis:

$$\begin{aligned} ((k+1)^2 + (k+1)) &= k^2 + 3k + 2 \\ &= (k^2 + k) + (2k + 2) \\ &= 2 \cdot r + 2 \cdot (k+1) \\ &= 2 \cdot (r + k + 1) \\ &= 2 \cdot s \quad \text{mit } s \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\checkmark$