Das Prinzip der vollständigen Induktion

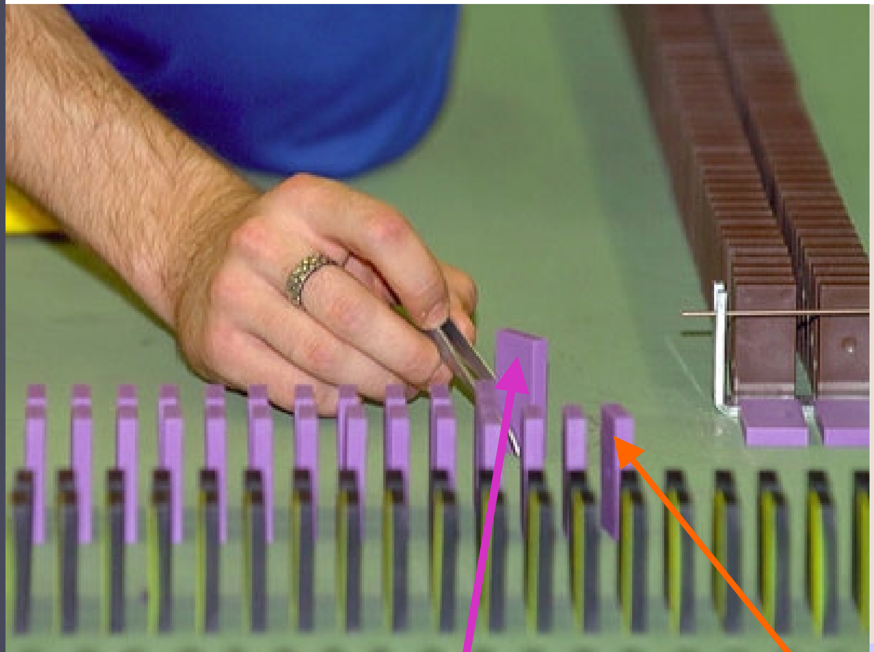
Das Prinzip der vollständigen Induktion

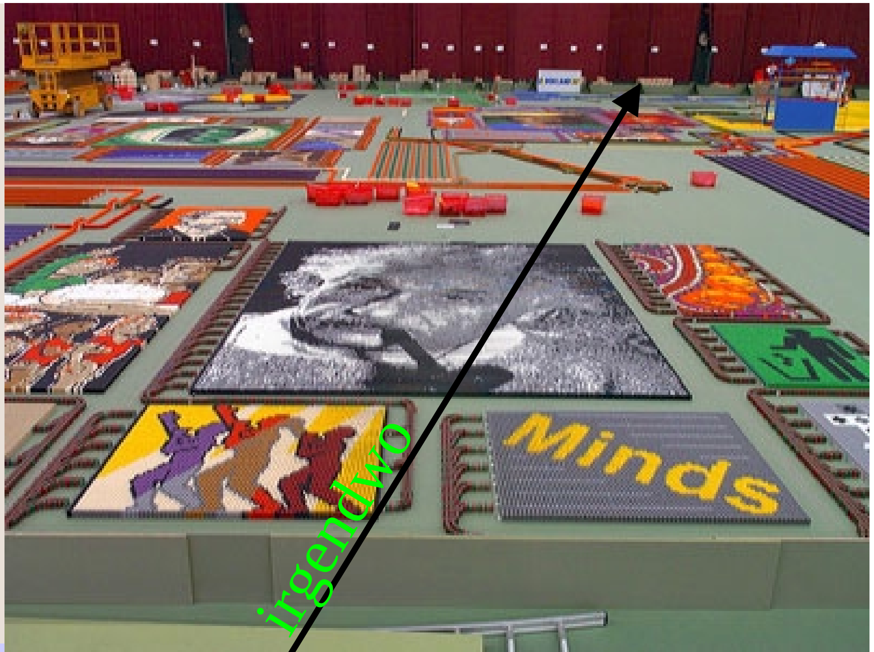
Wie kann ich sicher sein, dass alle Dominosteine in einer linearen Kette fallen ?

⇒ Der erste Stein muss fallen !

⇒ Mit jedem Stein der fällt muss auch sein Nachfolger fallen !

Das Prinzip der vollständigen Induktion





Der erste Stein muss fallen !

Vertrauens-
frage:
Fällt der Nachfolger wenn der Vorgänger fällt ?

Beispiel 1

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1+2+.....+n=\frac{n}{2}(n+1)$

d.h. alle Steine fallen !

Beweis :

1.Verankerung:

Die Aussage ist richtig für n=1

d.h. der erste Stein fällt !

$$1=\frac{1}{2}(1+1) \quad \checkmark$$

Beispiel 1

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + ... + n = \frac{n}{2}(n+1)$

Beweis:

Induktionsannahme:

Die Aussage sei richtig ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

d.h. ich nehme an, dass der k-te Stein fällt !

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k}{2}(k+1)$$

Beispiel 1

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1+2+......+n=\frac{n}{2}(n+1)$

Beweis:

2.Induktionsschritt: Unter dieser Annahme ist zu zeigen, dass ist die Formel dann auch zwangsläufig für k+1 richtig ist !

d.h. der (k+1)-te Stein fällt dann auch !

$$1+2+......+k+(k+1)=\frac{k+1}{2}((k+1)+1)$$

$$1+2+......+k+(k+1)=(1+2+......+k)+(k+1)$$

$$=\frac{k}{2}(k+1)+(k+1)=\frac{k+1}{2}(k+2)=\frac{k+1}{2}((k+1)+1) \quad \checkmark$$

Beispiel 2

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $8 \mid (3^{2n} - 1)$

Beweis :

1.Verankerung: Die Aussage ist richtig für n=1

$$8 \mid (3^{2\cdot 1} - 1) \Leftrightarrow 8 \mid 8 \quad \checkmark$$

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$8 \mid (3^{2k} - 1)$$

2.Induktionsschritt: z.z. Die Formel ist damit auch zwangsläufig für k+1 richtig !

$$8 \mid (3^{2(k+1)} - 1)$$

Beispiel 2

Beweis: z.z. $8 \mid (3^{2(k+1)} - 1)$

Die Aussage $8 \mid (3^{2k} - 1)$ ist gleichbedeutend mit

$(3^{2(k+1)} - 1) = 8 \cdot t$ für ein $t \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& 3^{2(k+1)} - 1 \\
&= 9 \cdot 3^{2k} - 1 \\
&= 9 \cdot (8r + 1) - 1 \quad | \text{ IV} \\
&= 72 \cdot r + 8 \\
&= 8 \cdot (9r + 1) \\
&= 8 \cdot t \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Beispiel 3

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $(1+x)^n > 1+nx$ falls $x \in \mathbb{R}^+$

Beweis :

1.Verankerung: Die Aussage ist richtig für n=2

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$$
$$> 1+2x \quad \text{falls } x \in \mathbb{R}^+ \quad \checkmark$$

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^k > 1+kx \quad \text{falls } x \in \mathbb{R}^+$$

2.Induktionsschritt: z.z. Die Formel damit auch zwangsläufig für k+1 richtig !

$$(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x \quad \text{falls } x \in \mathbb{R}^+$$

Beispiel 3

Beweis: z.z. $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x \quad \text{falls } x \in \mathbb{R}^+$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \\
&> (1+x)(1+kx) \ \text{ falls } x \in \mathbb{R}^+ && |\ \text{IV} \\
&> (1+kx+x+kx^2) \text{ falls } x \in \mathbb{R}^+ \\
&= (1+(k+1)x+kx^2) \text{ falls } x \in \mathbb{R}^+ && |\ kx^2 \in \mathbb{R}^+ ! \\
&> (1+(k+1)x) \text{ falls } x \in \mathbb{R}^+ \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Beispiel 4

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n > n^2$

Beweis:

1.Verankerung: Die Aussage ist richtig für n=1

$k \in \mathbb{N}$

$2^1 > 1^2$ ✓

Beispiel 4

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n > n^2$

Beweis:

Induktionsannahme:

Die Aussage sei richtig ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$2^k > k^2$$

2.Induktionsschritt:

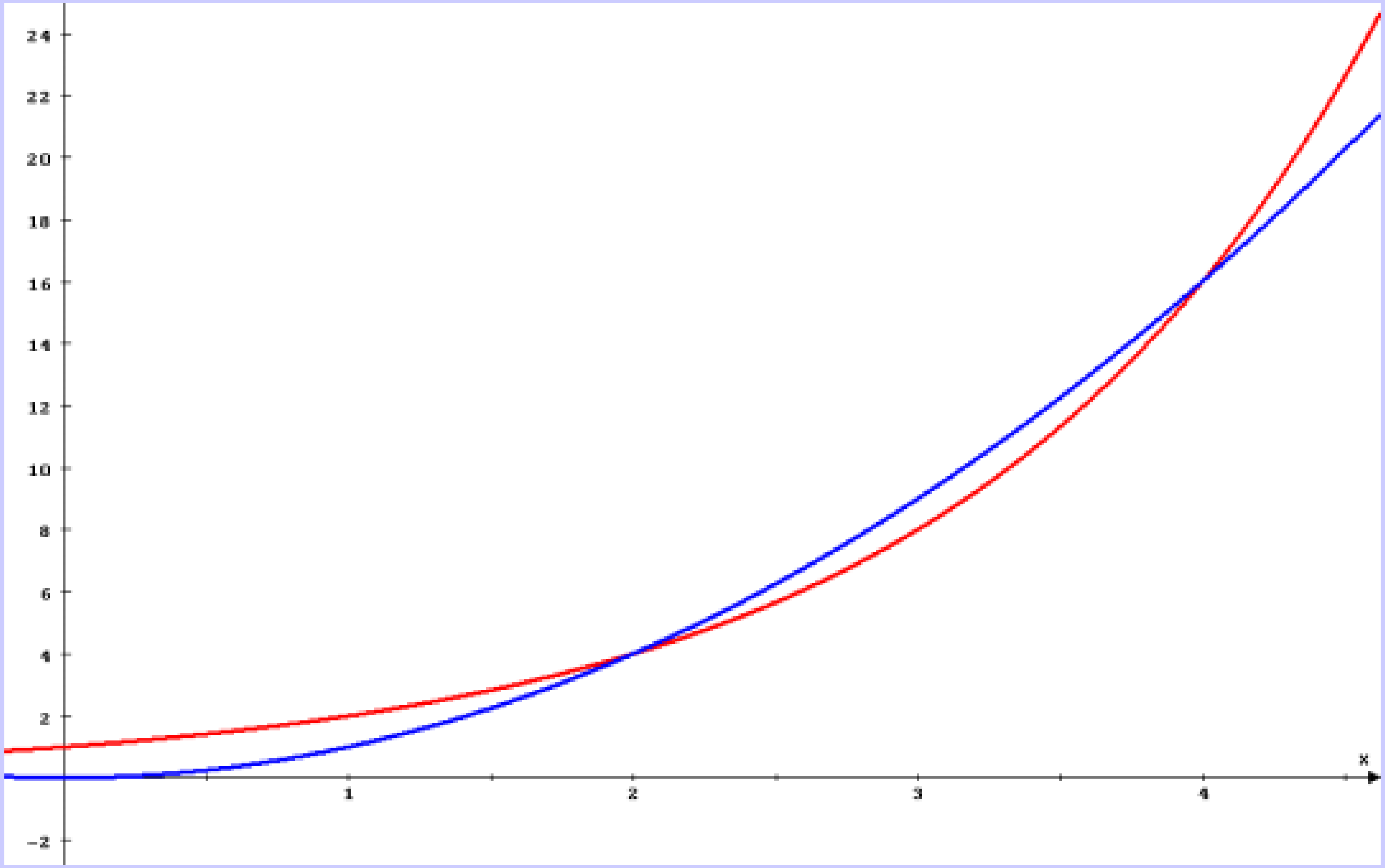
z.z. Die Aussage ist damit auch zwangsläufig für k+1 richtig !

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

Beispiel 4

$$2^x > x^2 \ ? \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Beweis:



Gegenbeispiel 5

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^2 - n + 41$ ist prim

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2 - n + 41$	43	47	53	61	71	83	97	113	131

Beweisversuch :

1.Verankerung: Die Aussage ist richtig für n=1

$1^2 - 1 + 41 = 41$ ist prim ✓

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$k^2 - k + 41 =$ ist prim

Gegenbeispiel 5

2.Induktionsschritt:

z.z. Die Formel dann auch zwangsläufig für k+1 richtig !

$(k+1)^2-(k+1)+41=$ ist prim

$$(k+1)^2-(k+1)+41=$$

$$k^2+2k+1-k-1+41=$$

$$k^2+k+41=$$

$$k^2-k+41+2k= \quad | \text{ IV}$$

$$\text{prim}+2k \quad | \text{ nicht unbedingt prim !}$$

$$k=40: \quad 40^2-40+41+2\cdot 40=\underbrace{1601}_{\text{prim}}+80=41\cdot 41 \quad | \text{ nicht prim!}$$

Gegenbeispiel 5

n	n^2-n+41			n ^2-n+41	
1	41	prim	22	503	prim
2	43	prim	23	547	prim
3	47	prim	24	593	prim
4	53	prim	25	641	prim
5	61	prim	26	691	prim
6	71	prim	27	743	prim
7	83	prim	28	797	prim
8	97	prim	29	853	prim
9	113	prim	30	911	prim
10	131	prim	31	971	prim
11	151	prim	32	1033	prim
12	173	prim	33	1097	prim
13	197	prim	34	1163	prim
14	223	prim	35	1231	prim
15	251	prim	36	1301	prim
16	281	prim	37	1373	prim
17	313	prim	38	1447	prim
18	347	prim	39	1523	prim
19	383	prim	40	1601	prim
20	421	prim	41	1681	nicht prim
21	461	prim	42	1763	nicht prim

In diesem Beispiel gelingt zwar die Verankerung, nicht aber der Induktionsschluss !

Gegenbeispiel 6

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n > n+1$

Beweis :

1.Verankerung: Die Aussage ist richtig für n=1

$1>1+1$ f

$2>2+1$ f

……. immer f

Die Verankerung gelingt nicht !

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$k > k+1$

Gegenbeispiel 6

2.Induktionsschritt:

z.z. Die Aussage ist damit auch zwangsläufig für k+1 richtig !

$k+1>(k+1)+1$

$$k > k+1 \qquad | +1$$

$$k+1 > (k+1)+1 \qquad \checkmark$$

Hier gelingt der Induktionsschluss, aber nicht die Verankerung !

Merke: Für den Induktionsbeweis sind beide Teile gleich wichtig !