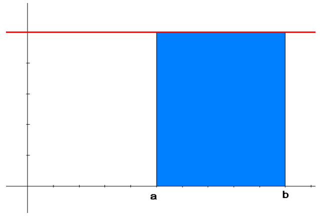
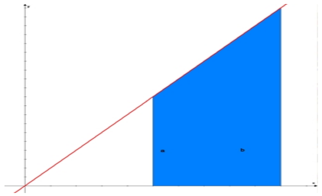
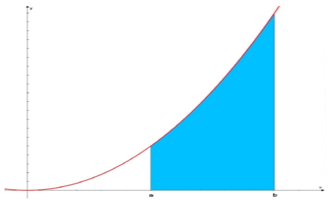
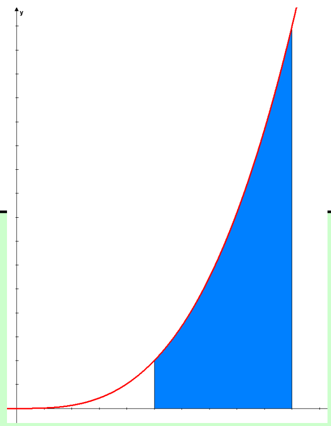
Übersicht

	$f(x)=x^0$	$A_a^b=\frac{b^1}{1}-\frac{a^1}{1}$
	$f(x)=x^1$	$A_a^b=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$
	$\frac{b^2}{2}$ $f(x)=x^2$	$A_a^b=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$
	$f(x)=x^3$	$A_a^b=\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$
	$f(x)=x^n$	$A_a^b=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$

$n\in\mathbb{N}$

Vermutung

$$f(x)=x^n \quad A_a^b=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1} \qquad n\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$$

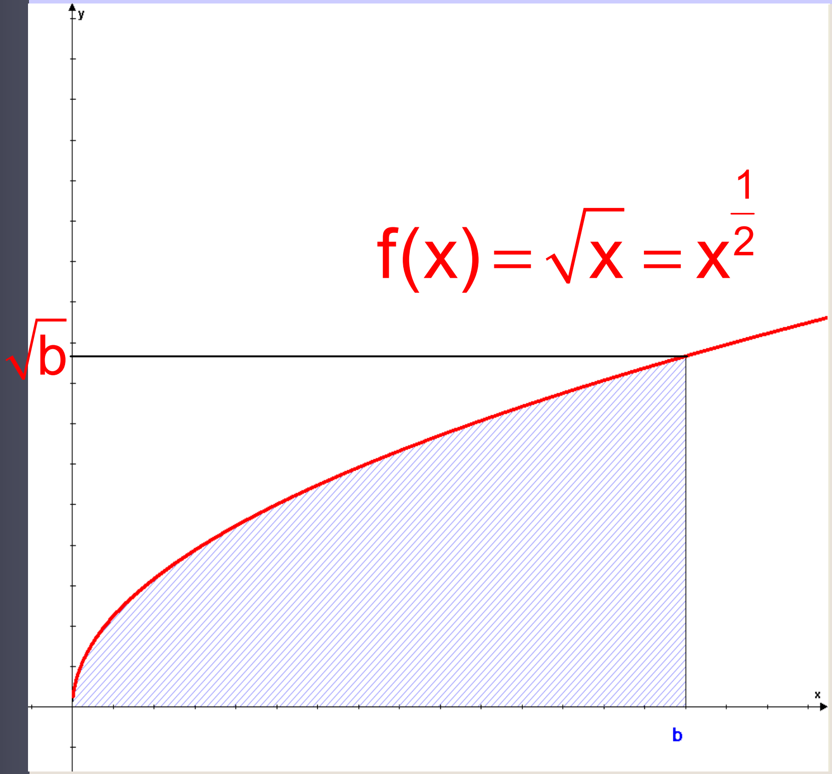
z.B.

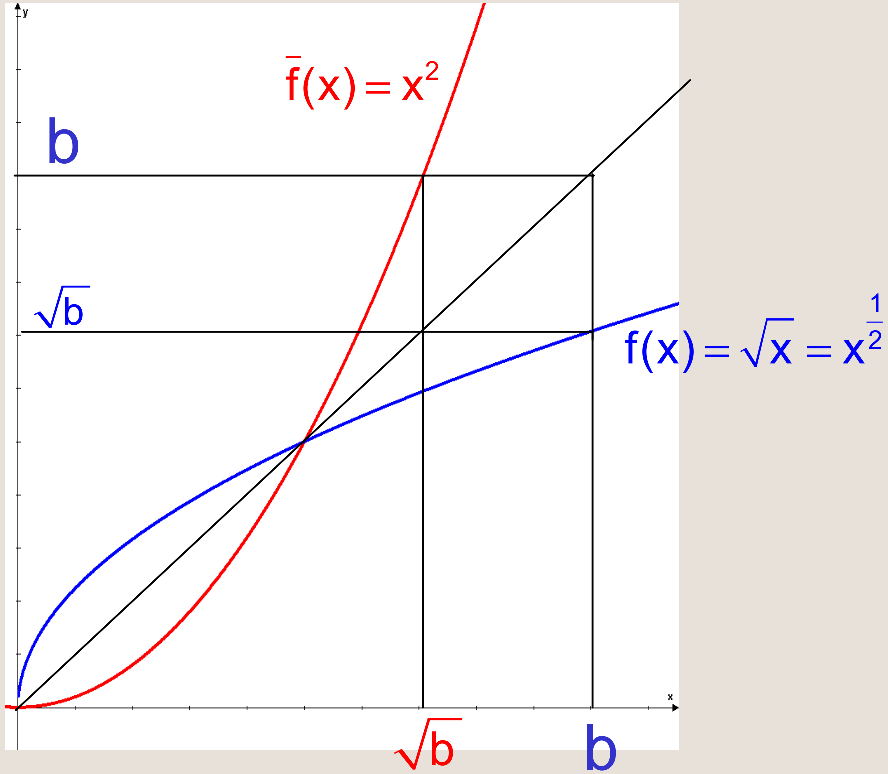
$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \quad A_0^b=\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{b^3} \qquad x\geq 0$$

z.B.

$$f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2} \quad A_1^b=\frac{b^{-1}}{-1}=-b^{-1}-(-1)=-\frac{1}{b}+1 \qquad x>0$$

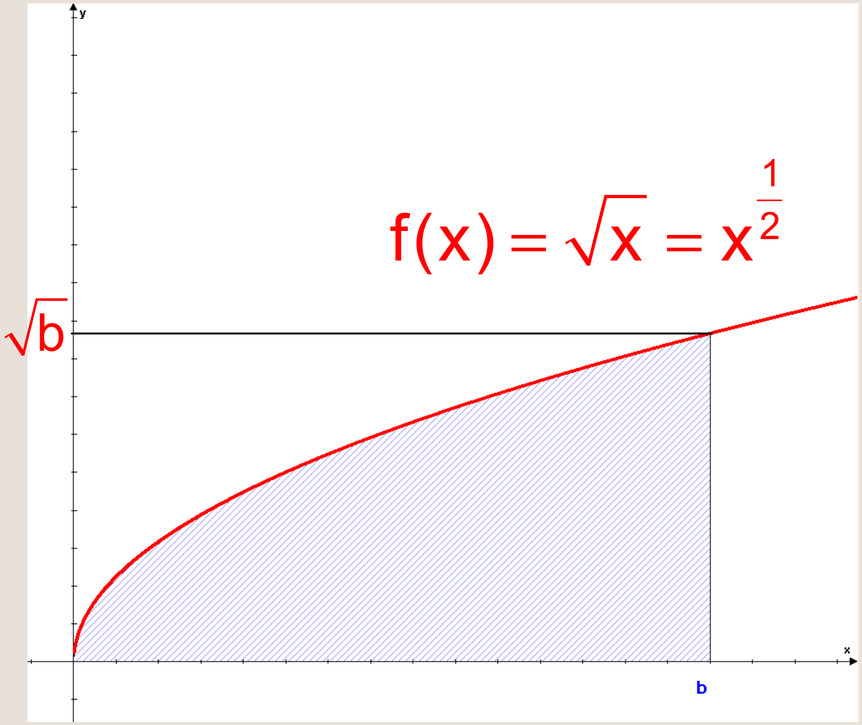
Integral der Wurzelfunktion

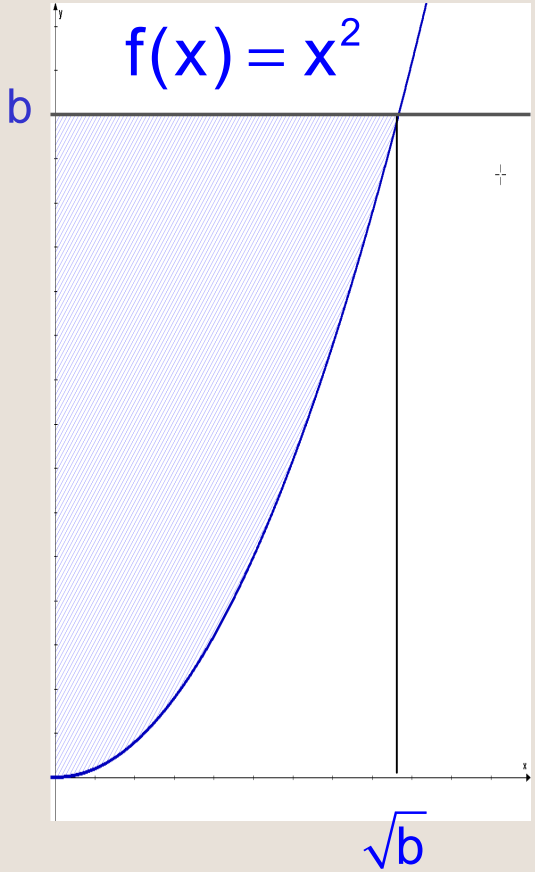




$$\int_0^b \sqrt{x}\,dx = b \cdot \sqrt{b} - \int_0^{\sqrt{b}} x^2 dx$$

Integral der Wurzelfunktion





$$\int_0^b \sqrt{x}\,dx = b\cdot\sqrt{b} - \int_0^{\sqrt{b}} x^2\,dx = b^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{b}^{\,3} = \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$$

Integral der Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_a^b \sqrt{x}\,dx = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$$

Analog lässt sich zeigen:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$\int_a^b \sqrt[n]{x}\,dx = \frac{n}{n+1} b^{\frac{n+1}{n}} - \frac{n}{n+1} a^{\frac{n+1}{n}}$$

Stammfunktion

Definition: Gegeben ist eine Funktion f , die auf einem Intervall I definiert ist.

F heißt Stammfunktion zu f auf I falls

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I$$

Funktion f	Stammfunktion F
$f(x) = 3x^2 - 7x + 3$	$F(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x^1 + C$
f(x) = cos(x)	F(x) = sin(x)+C
$f(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{x^2}$	$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{5}{x} + C$
f(x)=0	F(x)=C

Die Integralfunktion

Wenn die Funktion $f : t \to f(t)$ im Intervall I stetig ist und $a \in I$
dann existiert für alle $x \in I$ das Integral $\int_a^x f(t)\,dt$

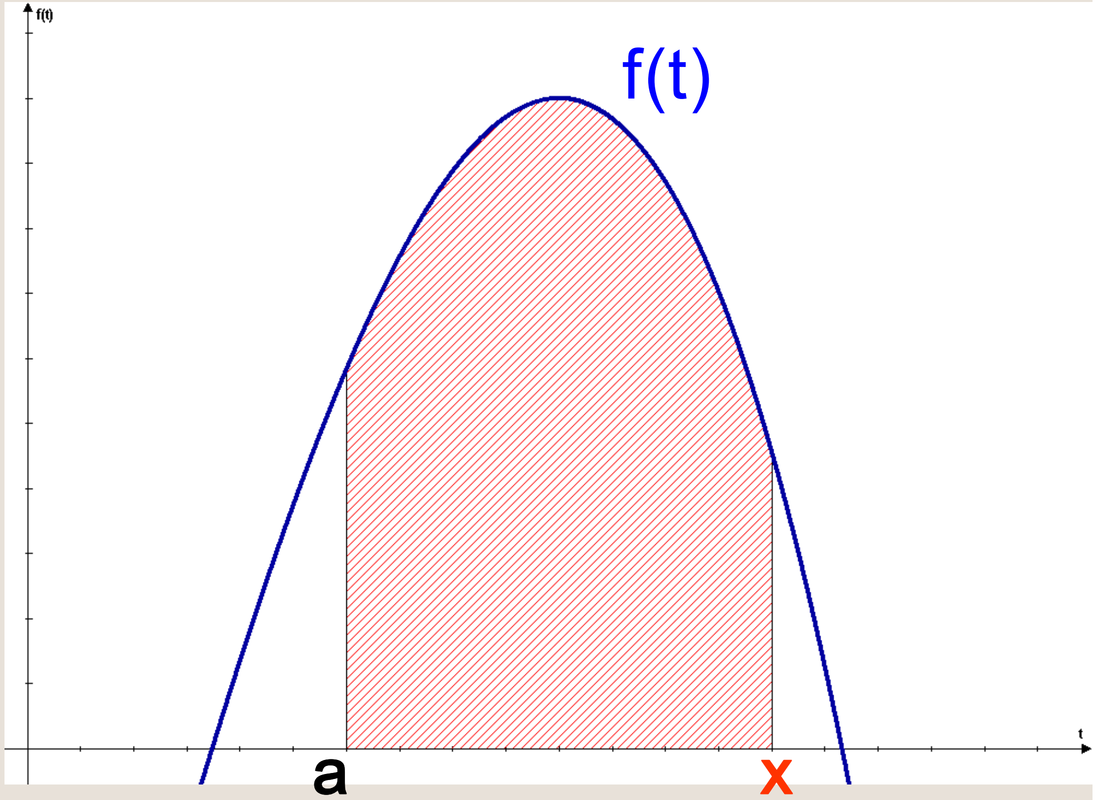
Die Funktion

$$J_a : x \to J_a(x)\ ;\ x \in I$$

mit

$$J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

heißt Integralfunktion



Die Integralfunktion

Falls $f(t) \geq 0$ für alle $t \in I$ und $x \geq a$, dann ist J_a die Flächeninhaltsfunktion. $J_a(x)$ ist der Flächeninhalt der Fläche, die der Funktionsgraph mit der t-Achse im Intervall [a;x] einschließt.

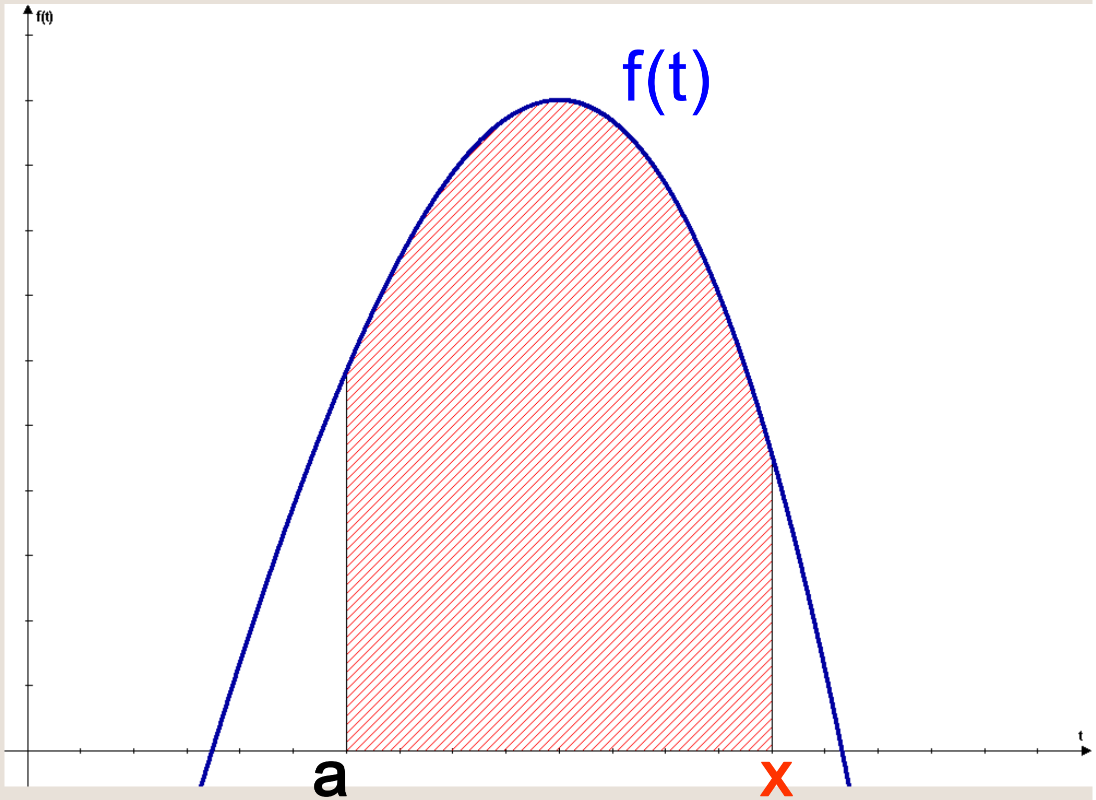
Die Funktion

$$J_a : x \rightarrow J_a(x) \; ; \; x \in I$$

mit

$$J_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

kann hier als Flächeninhaltsfunktion interpretiert werden !



Integralfunktion und Stammfunktion

Fundamentaler Satz:

Jede Integralfunktion $J_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist Stammfunktion zu f d.h. :

$$J_a'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in I$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Funktion f sei auf dem Intervall I stetig. Ist dann F eine beliebige Stammfunktion zu f auf I dann gilt für $a \in I$ und $b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Hier erkennt man den unmittelbaren Zusammenhang zwischen der Differenzial- und der Integralrechnung !

Gottfried Wilhelm Leibniz

1646-1716

Isaac Newton

1643-1727

Integrationsregeln(1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_b^a k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Integrationsregeln(2)

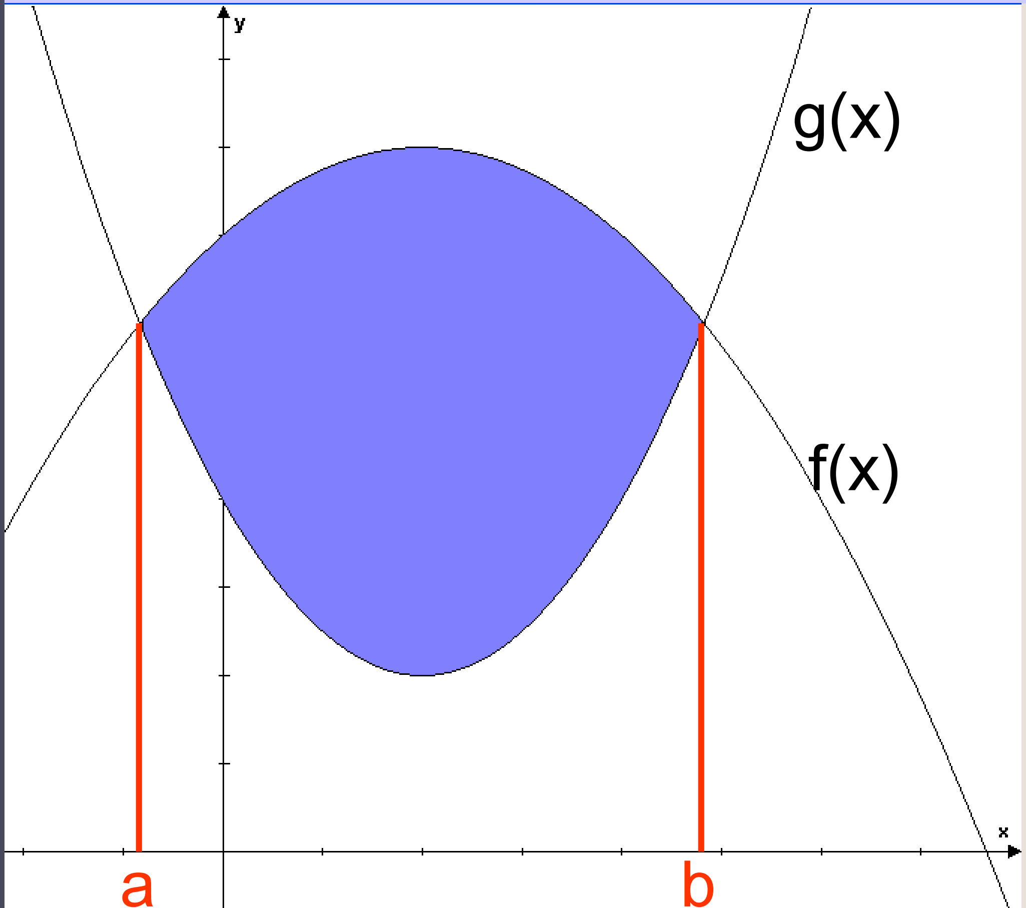
$$\int_a^a (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_b^a f(x)\,dx \pm \int_b^a g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Monotonie des Integrals: Sind f und g auf [a;b] stetig d.h. integrierbar und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a;b]$ dann gilt:

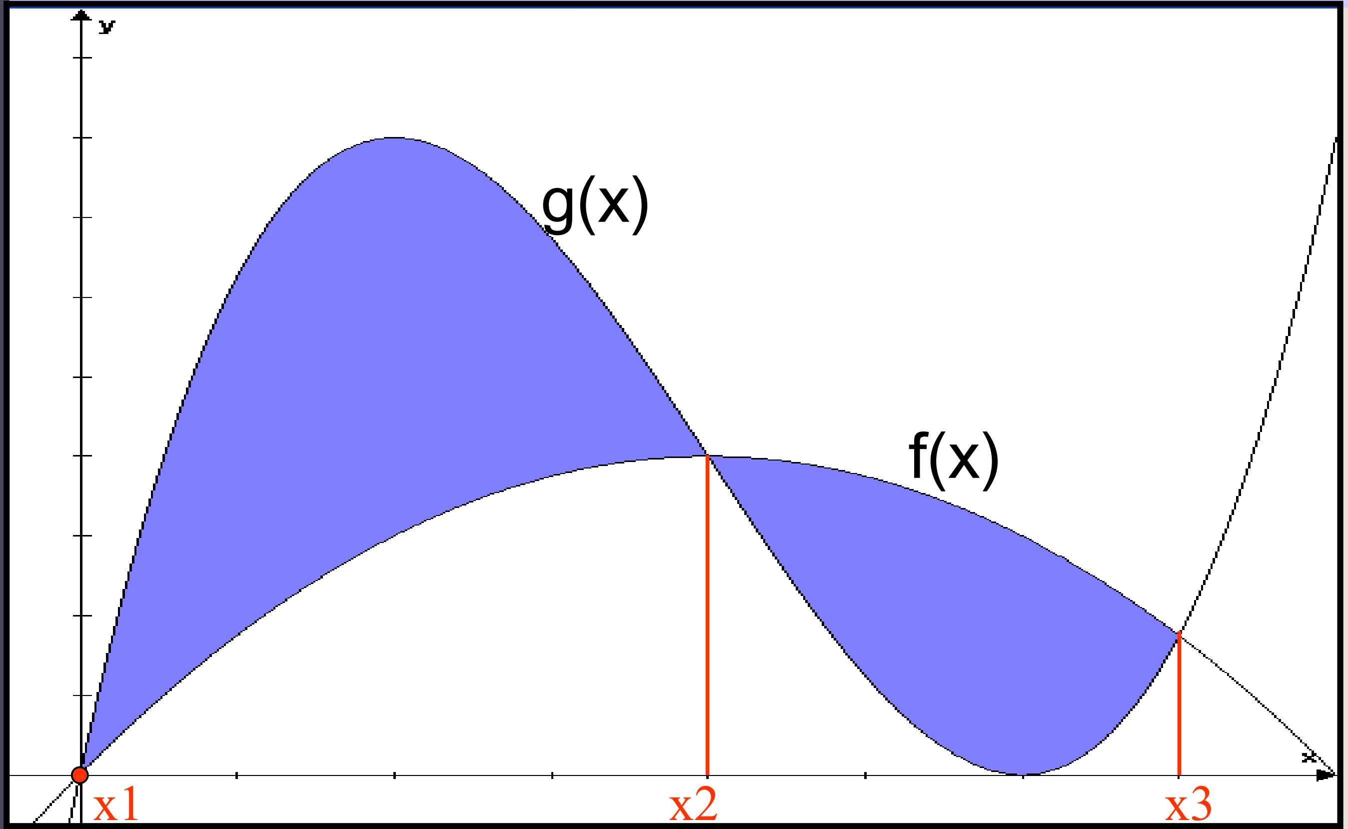
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Flächen zwischen zwei Graphen



$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Flächen zwischen zwei Graphen



$$A = \int_{x1}^{x2} [g(x) - f(x)]dx + \int_{x2}^{x3} [f(x) - g(x)]dx$$