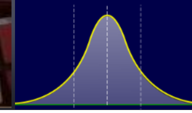
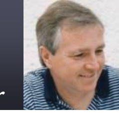




Permutationen

Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Personen in eine Reihe auf 10 Sitze zu setzen?

1. Sitz : 10 Möglichkeiten

2. Sitz : 9 Möglichkeiten

3. Sitz : 8 Möglichkeiten

…………………………….

9. Sitz : 2 Möglichkeiten

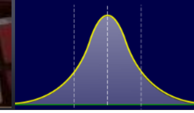
10. Sitz : 1 Möglichkeit

1.Und 2. Sitz : $10 \cdot 9$ Möglichkeiten

Es gibt also

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Möglichkeiten 10 Personen auf 10 Sitze zu verteilen.



Fakultäten

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, wobei n = 2; 3; 4... ist.

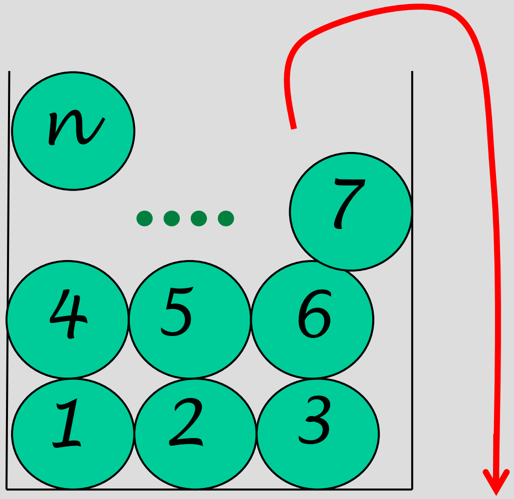
Zusätzlich hat man festgelegt: 0! = 1 ; 1! = 1

n	n!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000

100!=93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000

$$100! \approx 9{,}3326 \cdot 10^{157}$$

Permutationen- Urnenmodell

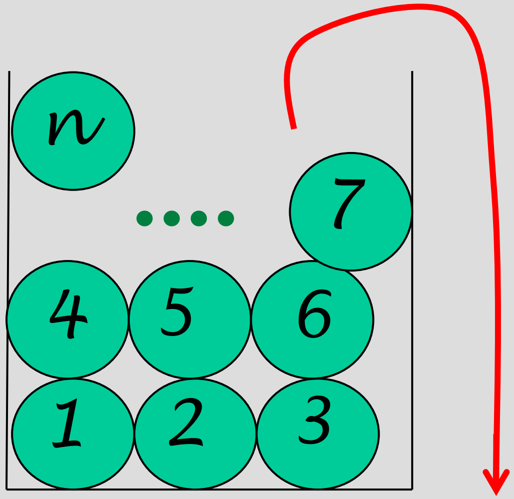


Ich ziehe alle n Kugeln ohne Zurücklegen und bilde n – Tupel

(5 | 2 | 17 | n | .... | 55)

Es gibt also n! Möglichkeiten n Objekte auf n Plätze zu verteilen!

Variationen(ohne)- Urnenmodell



Ich ziehe $k \leq n$ Kugeln ohne Zurücklegen und bilde k – Tupel

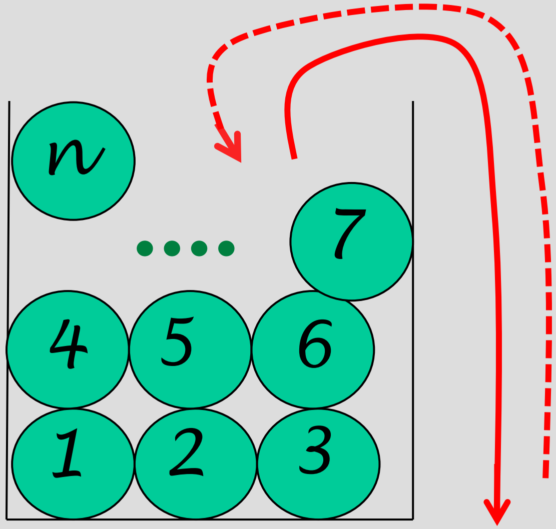
$(8 \,|\, 4 \,|\, 27 \,|\, 19 \,|\, ... \,|\, 33)$

Hier wird die Reihenfolge berücksichtigt

Es gibt also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Möglichkeiten k Objekte aus n Objekten auszuwählen und diese auf k Plätze zu verteilen!

Variationen(mit)- Urnenmodell



Ich ziehe $k \leq n$ Kugeln **mit Zurücklegen** und bilde k – Tupel

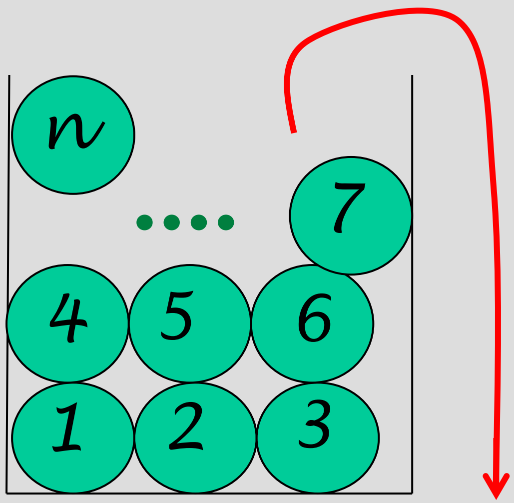
(8 | 4 | 8 | 19 | ..... | 33)

Hier wird die Reihenfolge berücksichtigt

Es gibt also $\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots\dots \cdot n}_{k\ \text{Faktoren}} = n^k$

Möglichkeiten k Objekte aus n Objekten mit Wieder-holung auszuwählen und diese auf k Plätze zu verteilen!

Kombinationen(ohne)- Urnenmodell



Ich ziehe $k < n$ Kugeln **ohne Zurücklegen** und bilde **k – Teilmengen**

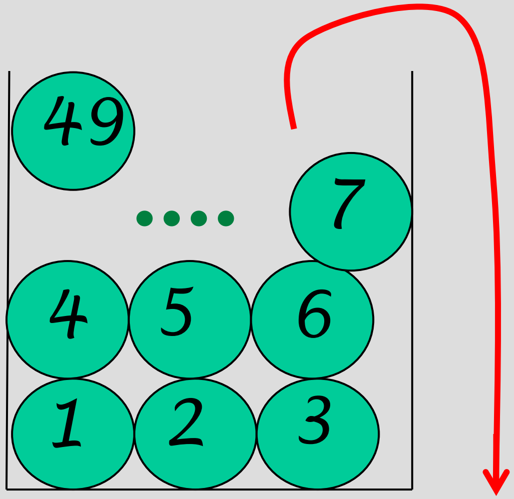
$$\{8; 4; 27; 19; .....; 33\}$$

Hier spielt die Reihenfolge keine Rolle!

Es gibt $\left[n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdots(n-k+1)\right]:k! = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Möglichkeiten k Objekte aus n Objekten auszuwählen

Kombinationen(ohne)- Lotto 6 aus 49



Ich ziehe $k = 6$ Kugeln aus $n = 49$

ohne Zurücklegen und bilde

6 – Teilmengen

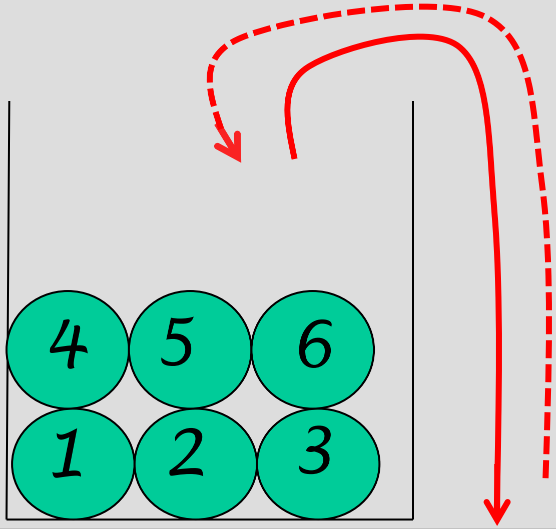
$\{8; 4; 27; 19; 11; 33\}$

Hier spielt die Reihenfolge keine Rolle!

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13983816$$

Möglichkeiten 6 Objekte aus 49 Objekten auszuwählen

Kombinationen(mit)- Urnenmodell



Ich ziehe $k = 7$ Kugeln aus $n = 6$

mit Zurücklegen und bilde

$k-$Konglomerate

$\langle 3;\ 4;\ 3;\ 1;\ 3;\ 4;\ 6 \rangle$

Die Reihenfolge spielt hier Keine Rolle!

Dieses Ergebnis kann man auch so darstellen:

1	2	3	4	5	6
+		+++	++		+

Und ohne Informationsverlust auch so:

$+ \quad | \quad | +++ \quad | ++ \quad | \quad | +$

Kombinationen(mit)- Urnenmodell

+	|	|	+	+	+	|	+	+	|	|	+

+	|	|	+	+	+	|	+	+	|	|	+

Wir haben hier eine Kombination aus (6-1) Strichen | und 7 Kreuzen + , die in einem 12-Tupel anzuordnen sind.

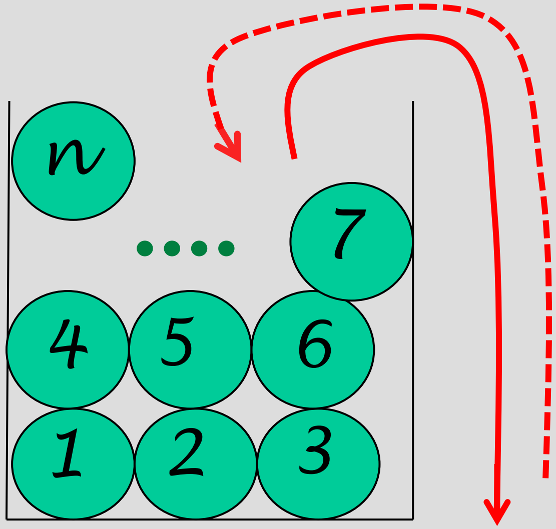
Es gibt $\binom{12}{7}$ Möglichkeiten die Plätze für die 7 Kreuze auszuwählen

und dann noch $\binom{5}{5} = 1$ Möglichkeit die Plätze für die 5 Striche

auszuwählen also insgesamt

$$\binom{12}{7} \cdot \binom{5}{5} = \binom{12}{7} = \binom{6-1+7}{7} = 792 \text{ Möglichkeiten}$$

Kombinationen(mit)- Urnenmodell



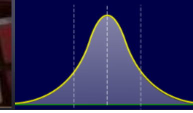
Ich ziehe k Kugeln aus n mit Zurücklegen und bilde k – Konglomerate

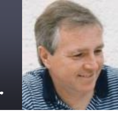
$$\langle 8;\ 4;\ 8;\ 19;\ \ldots\ldots;\ 8 \rangle$$

Hier spielt die Reihenfolge keine Rolle und jedes Element kann mehrfach vorkommen.

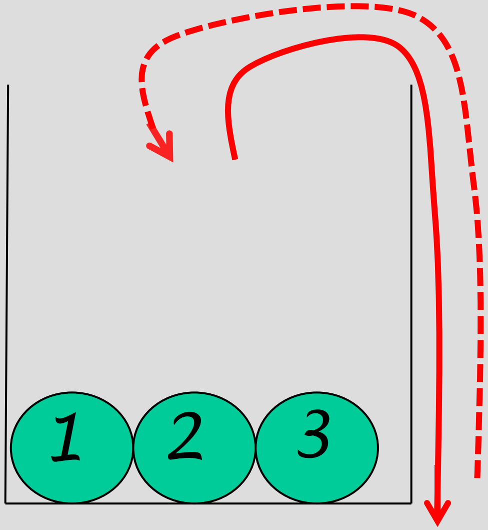
Es gibt $\binom{n-1+k}{k}$

Möglichkeiten k Objekte aus n Objekten mit Wiederholungen auszuwählen.





Übung 1 Toto 13-er Systemwette



Spielplan

Nr.	Heimverein	Auswärtsverein	Ergebnis
1	Borussia Dortmund	Hannover 96	3:1
2	1899 Hoffenheim	Bayern München	0:1
3	1. FC Nürnberg	SC Freiburg	1:1
4	Werder Bremen	FC Augsburg	0:1
5	Hamburger SV	SpVgg Greuther Fürth	1:1
6	VfL Wolfsburg	FC Schalke 04	1:4
7	Bayer Leverkusen	VfB Stuttgart	2:1
8	Fortuna Düsseldorf	1. FSV Mainz 05	1:1
9	VfR Aalen	FC St. Pauli	0:1
10	1860 München	FC Ingolstadt 04	1:1
11	FSV Frankfurt	1. FC Köln	1:1
12	AC Mailand	Lazio Rom	3:0
13	Tottenham Hotspur	Arsenal London	2:1

1	2	0	2	0	2	1	0	2	0	0	1	1

Es gibt also $n^k = 3^{13} = 1594323$ Möglichkeiten einen Lottoschein auszufüllen.

Übung 2 MISSISSIPPI

Wie viele verschiedene Zeichenfolgen kann man mit den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden?

			M							

$\binom{11}{1}$ *Möglichkeiten*

I			M	I			I		I	

$\binom{10}{4}$ *Möglichkeiten*

I		S	M	I	S	S	I		I	S

$\binom{6}{4}$ *Möglichkeiten*

I	P	S	M	I	S	S	I	P	I	S

$\binom{2}{2}$ *Möglichkeiten*

Insgesamt $\binom{11}{1}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{2}=\frac{11!}{1!\cdot 10!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{2!\cdot 0!}=\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}$ Möglichkeiten

Übung 3 MISSISSIPPI

Eine andere Herleitung:

Es gibt insgesamt 11! Permutationen der 11 Buchstaben:

I	P	S	M	I	S	S	I	P	I	S

Bei jeder Zeichenfolge gibt es

1! Permutationen der M

4! Permutationen der I

4! Permutationen der S

2! Permutationen der P

die keine Änderung der Zeichenfolge ergeben, also

$$\text{Insgesamt } \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} \text{ Möglichkeiten}$$

Permutationen mit dem Taschenrechner

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

nPr : $\frac{n!}{(n-r)!}$

r-Permutationen

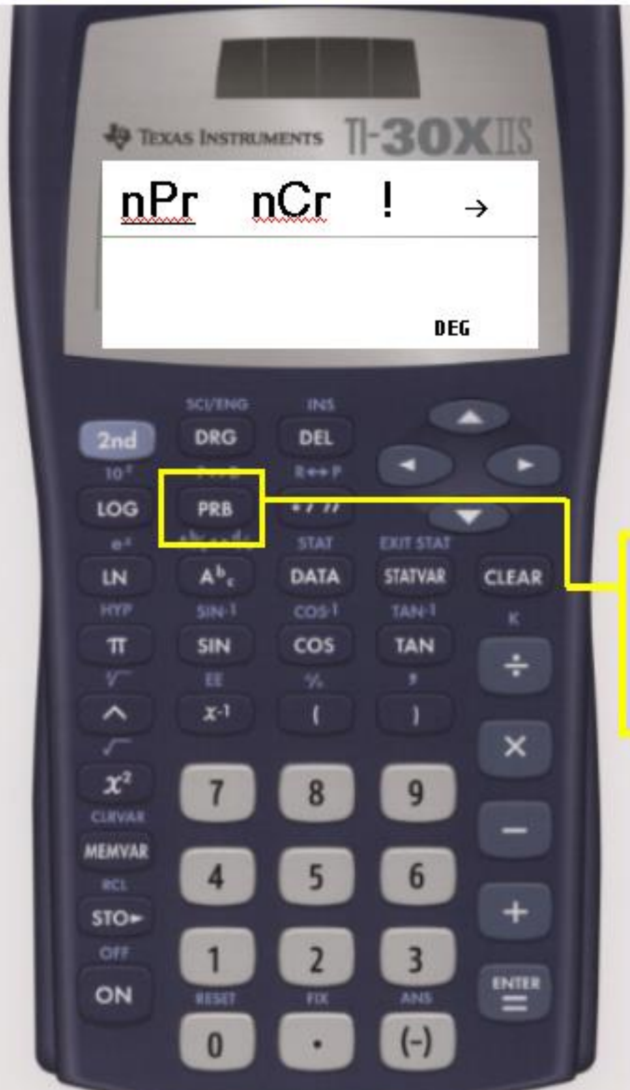
aus n Elementen

nCr : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

r-Combinationen

(r-Teilmengen)

aus n Elementen



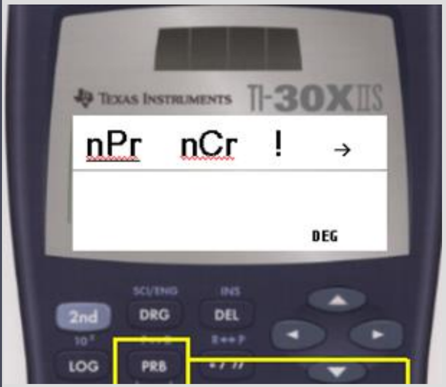
probability : Wahrschein-lichkeit

PRB

Auswahl der Funktionen

Kombinationen mit dem Taschenrechner

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!}$$



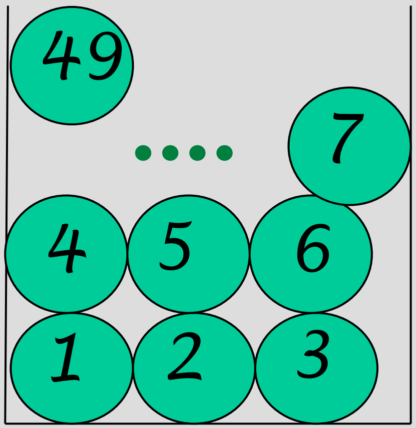
1. 49 eingeben
2. **PRB-Taste drücken**
3. **Markierung mit Cursortasten auf nCr bewegen**
4. **Entertaste drücken**
5. **6 eingeben**
6. **Entertaste drücken**

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

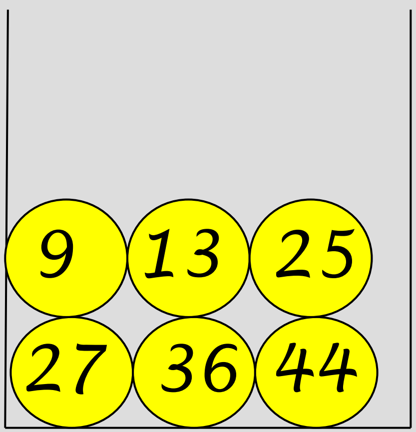
Analog erhält man mit **nPr**

$${}_{18}P_3 = \frac{18!}{(18-3)!} = 4896$$

Übung 4 Lottotips mit 0,1,2,3,…6 Richtigen



43 falsche



6 richtige

$$N_0 = \binom{6}{0} \cdot \binom{43}{6} = 6.096.454$$

$$N_1 = \binom{6}{1} \cdot \binom{43}{5} = 5.775.588$$

$$N_2 = \binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4} = 1.851.150$$

$$N_3 = \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246.820$$

$$N_4 = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13.545$$

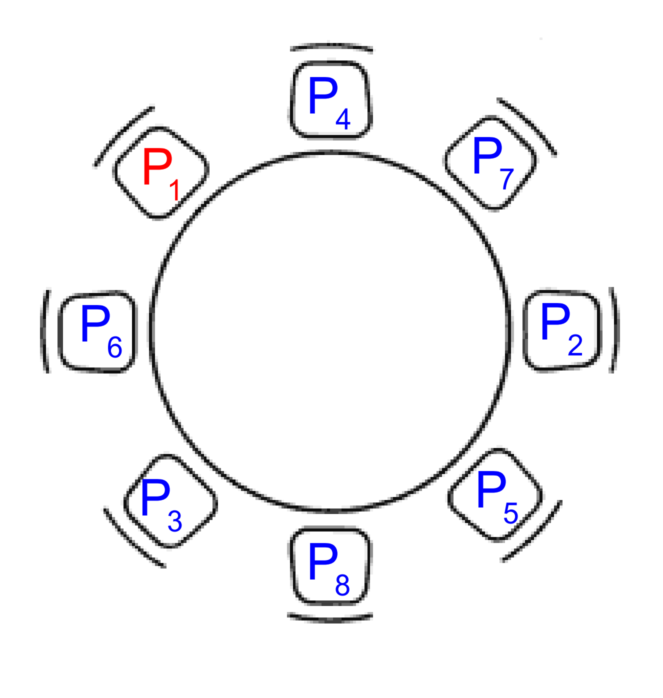
$$N_5 = \binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 258$$

$$N_6 = \binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 1$$

$$\sum_{i=0}^{6} N_i = 13.983.816$$

Übung 5

Wie viele Sitzanordnungen gibt es für 8 Personen an einem runden Tisch?



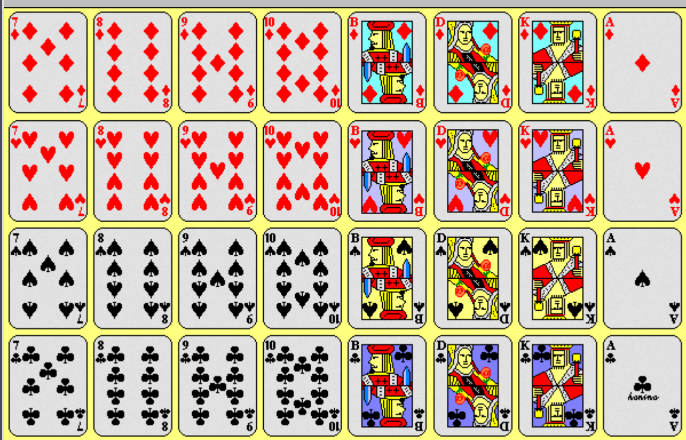
Wo die Person P1 sitzt ist gleich-gültig.

Für die restlichen 7 Personen gibt es dann noch 7! Permutationen.

$$N = 7!$$

Übung 6

Wie viele mögliche Kartenverteilungen gibt es beim Skat?



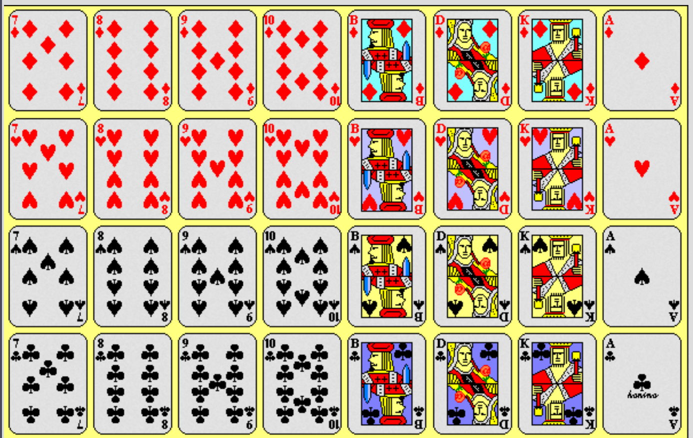
Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3	Stock

$$N = \frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 2!} \approx 2{,}7533 \cdot 10^{15}$$

Stichwort: Mississippi

Übung 7

Wie viele Möglichkeiten gibt es aus den 32 Karten 10 Karten auszuwählen, wenn darunter mindestens 2 Asse sein sollen?



$$N = \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{8} = 18.648.630$$

Übung 8

Ein Passwort soll mit 2 Buchstaben beginnen gefolgt von einer Zahl mit 7 oder 8 Ziffern. Groß- und Kleinschreibung werden unterschieden. Wie viele mögliche Passworte gibt es?

Großbuchstaben	A	Ä	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	Ö	P	Q	R	S	ß	T	U	Ü	V	W	X	Y	Z
Kleinbuchstaben	a	ä	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	ö	p	q	r	s	ß	t	u	ü	v	w	x	y	z

ä	K	3	5	1	0	0	9	3	5

ß	z	3	3	9	1	2	5	8

$$N_1 = 60 \cdot 60 \cdot 10^8 = 3{,}6 \cdot 10^{11}$$

$$N_2 = 60 \cdot 60 \cdot 10^7 = 3{,}6 \cdot 10^{10}$$

$$\boxed{N = N_1 + N_2 = 3{,}96 \cdot 10^{11}}$$

Übung 9

Sichere Passwörter

Rechenzeit eines Brute-Force-Angriffs bei 1 Milliarde Schlüsseln pro Sekunde

	Passwortlänge						
Zeichenraum	4 Zeichen	5 Zeichen	6 Zeichen	7 Zeichen	8 Zeichen	9 Zeichen	10 Zeichen
26 [a-z]	<1 Sekunde	<1 Sekunde	<1 Sekunde	8 Sekunden	4 Minuten	2 Stunden	2 Tage
52 [A-Z;a-z]	<1 Sekunde	<1 Sekunde	20 Sekunden	17 Minuten	15 Stunden	33 Tage	5 Jahre
62 [A-Z;a-z;0-9]	<1 Sekunde	<1 Sekunde	58 Sekunden	1 Stunde	3 Tage	159 Tage	27 Jahre
96 (+Sonderzeichen)	<1 Sekunde	8 Sekunden	13 Minuten	21 Stunden	84 Tage	22 Jahre	2.108 Jahre

$$N = 3{,}96 \cdot 10^{11}$$

$$\frac{N}{10^9} = 3{,}96 \cdot 10^2$$

$3{,}96 \cdot 10^2 s \approx 7$ Minuten

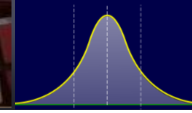
3	A	3	b	1	X	k	9	3	c

$$N = 62^{10} \approx 8{,}4 \cdot 10^{17}$$

$$\frac{N}{10^9} \approx 8{,}4 \cdot 10^8 \qquad 1y \approx 3{,}154 \cdot 10^7 s$$

$$\frac{8{,}4 \cdot 10^8}{3{,}154 \cdot 10^7} \approx \boxed{26{,}6}$$

Günstig sind auch zusätzliche Sonderzeichen, die es auf der Tastatur nicht gibt, z. B. „®,¤,©“. Diese Zeichen werden meist bei Brute-Force-Angriffen außer acht gelassen werden.



Übung 10

Sie haben 6 verschiedene Farben (inklusive rot, blau, grün). Auf wie viele Arten kann man 5 Felder färben, wenn

a) keine Einschränkung besteht? $N=6^5$

b) jedes Feld eine andere Farbe haben soll? $N = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$

c) benachbarte Felder verschieden gefärbt werden sollen? $N = 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3750$

d) die beiden Felder links und rechts aussen rot sein sollen? $N = 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = 216$

e) 2 Felder rot, 2 blau und 1grün sein soll?

$$N = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$$

"Mississippi"