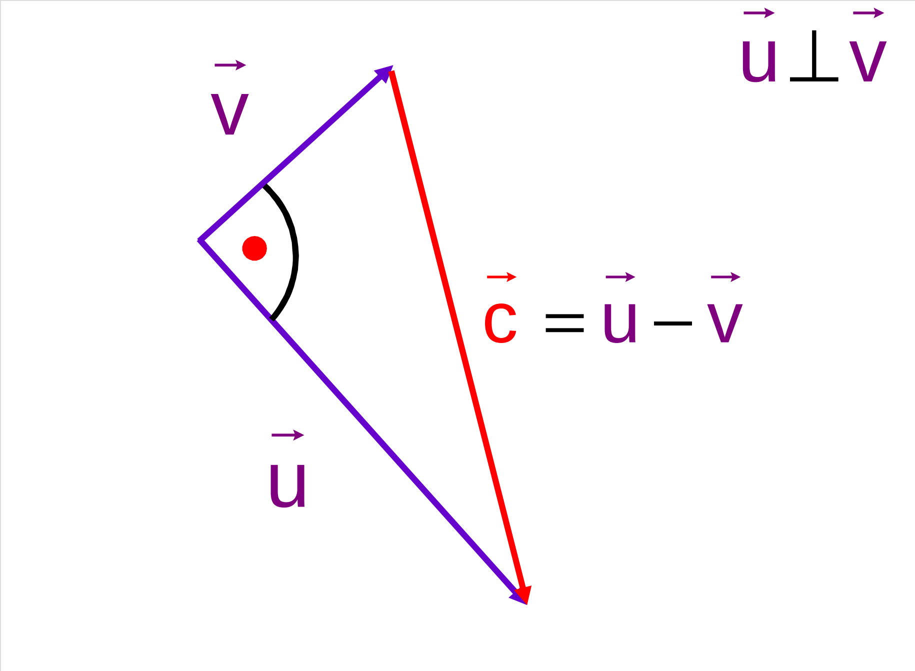
Zwei zueinander senkrechte Vektoren



Pythagoras:

$$\left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u} - \vec{v}\right|^2$$

$$u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} + v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} + v_3^{\ 2} = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$

$$0 = -2(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \;\Leftrightarrow\; u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$$

Das Skalarprodukt

Definition: Das Produkt

$$\vec{u} * \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

heißt Skalarprodukt der Vektoren $\vec{u}; \vec{v}$

Der Wert des Produkts ist eine reelle Zahl d.h. ein Skalar

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} * \vec{v} = 0$$

Insbesondere steht dann der Nullvektor $\vec{0}$ senkrecht auf jedem anderen Vektor.

Die Eigenschaften des Skalarprudukts

$$\vec{u} * \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

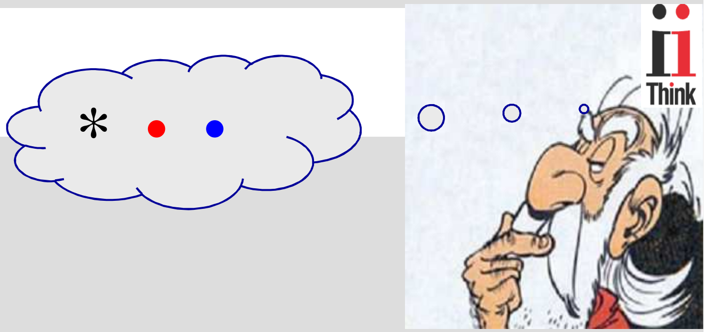
Die folgenden Eigenschaften lassen sich leicht nachweisen:

$$\vec{u} * \vec{v} = \vec{v} * \vec{u} \quad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{u} * (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} * \vec{v} + \vec{u} * \vec{w} \quad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

$$(r \cdot \vec{u}) * (s \cdot \vec{v}) = (r \cdot s) \cdot (\vec{v} * \vec{u}) \quad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3; r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} * \vec{u} = \left|\vec{u}\right|^2 \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{u} \in \mathbb{R}^3$$

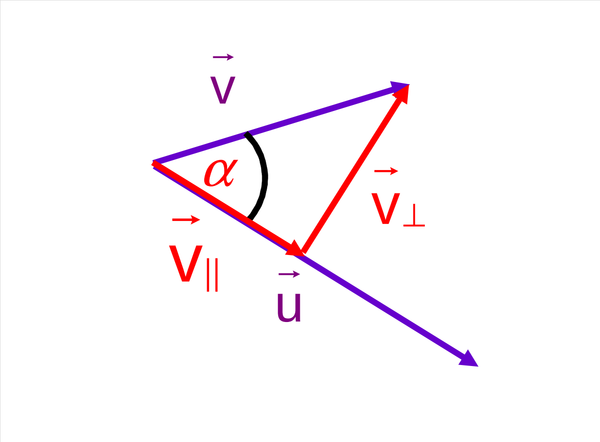


Die Eigenschaften des Skalarprudukts

Spezialfall:

$$\vec{u} * \vec{u} = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2} = |\vec{u}|^2 \quad \text{für alle } \vec{u} \in \mathbb{R}^3$$

Skalarprodukt und Winkel



$$\frac{|\vec{v}_\parallel|}{|\vec{v}|} = \frac{|\lambda\vec{u}|}{|\vec{v}|} = \frac{\lambda|\vec{u}|}{|\vec{v}|} = \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned}\vec{u} * \vec{v} &= \vec{u} * (\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp) \\ &= \vec{u} * \vec{v}_\parallel + \underbrace{\vec{u} * \vec{v}_\perp}_{=0} \\ &= \vec{u} * (\lambda\vec{u}) \\ &= \lambda|\vec{u}|^2 = \lambda|\vec{u}||\vec{u}| \\ &= |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\alpha}$$

$$0 \le \alpha \le 90^\circ : \quad \vec{u} * \vec{v} \ge 0$$

$$90^\circ \le \alpha \le 180^\circ : \quad \vec{u} * \vec{v} \le 0$$

Skalarprodukt und Winkel   Beispiele

$$\vec{u} * \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

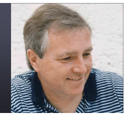
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} * \vec{v} = 5$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{14} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{26}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} \approx 0{,}262$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 74{,}8^\circ \quad (\overset{\frown}{\alpha} \approx 1{,}31)$$



Skalarprodukt und Winkel   Beispiele

Gesucht ist ein Vektor $\vec{n}$, der auf der Ebene E senkrecht steht.

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 - 3 \cdot n_3 = 0$$

$$\vec{n} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$3 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 4 \cdot n_3 = 0$$

Skalarprodukt und Winkel Beispiele

$\vec{n} \perp E$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\left| \begin{array}{l} -2 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 - 3 \cdot n_3 = 0 \\ 3 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 4 \cdot n_3 = 0 \end{array} \right|$$

LGS(2,3) $n_3 \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\left| \begin{array}{l} -2 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 - 3 \cdot n_3 = 0 \\ 0 \cdot n_1 + 7 \cdot n_2 - 1 \cdot n_3 = 0 \end{array} \right| \quad 2 \cdot II + 3 \cdot I$$

$$7 \cdot n_2 - 1 \cdot n_3 = 0$$

$$n_2 = \frac{1}{7} n_3$$

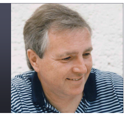
$$-2 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 - 3 \cdot n_3 = 0$$

$$n_1 = \frac{1}{14} n_3 - \frac{3}{2} \cdot n_3$$

$$n_1 = -\frac{10}{7} n_3$$

Mit n_3=-7 ergibt sich ein spezieller Lösungsvektor :

$$\vec{n} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$



Skalarprodukt und Winkel Beispiele

$$\vec{n} \perp E \qquad E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\left| \begin{array}{l} u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 = 0 \\ v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 = 0 \end{array} \right| \quad \text{LGS}(2,3)$$

$$\boxed{n_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \qquad u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 = 0 \\ 0 \quad + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot n_2 + (u_1 v_3 - u_2 v_3) \cdot n_3 = 0 \end{array} \right| \quad u_1 \cdot II - v_1 \cdot I$$

$$(u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot n_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot n_3 = 0$$

$$\boxed{n_2 = \frac{(u_1 v_3 - u_3 v_1)}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)} \cdot n_3}$$

$$n_1 = \frac{-u_2 \cdot n_2 - u_3 \cdot n_3}{u_1}$$

$$\boxed{n_1 = \frac{(u_2 v_3 - u_3 v_2)}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)} \cdot n_3}$$

Skalarprodukt und Winkel Beispiele

$$\vec{n} \perp \vec{u} \quad \wedge \quad \vec{n} \perp \vec{v}$$

$$n_1 = \frac{(u_2v_3 - u_3v_2)}{(u_1v_2 - u_2v_1)} \cdot n_3$$

$$n_2 = \frac{(u_1v_3 - u_3v_1)}{(u_1v_2 - u_2v_1)} \cdot n_3$$

$n_3 \in \mathbb{R}$ beliebig

Mit $n_3 = (u_1v_2 - u_2v_1)$ ergibt sich ein spezieller Lösungsvektor:

$$n_1 = (u_2v_3 - u_3v_2)$$

$$n_2 = (u_1v_3 - u_3v_1)$$

$$n_3 = (u_1v_2 - u_2v_1)$$

Das Vektorprodukt

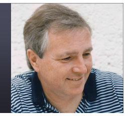
Definition:

Das Produkt $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$ heißt Vektorprodukt

der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Merkregel mit Hilfe einer Determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$



Die Eigenschaften des Vektorprodukts

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix} u_2v_3-u_3v_2 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ u_1v_2-u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Die folgenden Eigenschaften lassen sich leicht nachweisen:

$$\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u}) \quad \text{für alle } \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(-\vec{v})\times\vec{u} \quad \text{für alle } \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$$

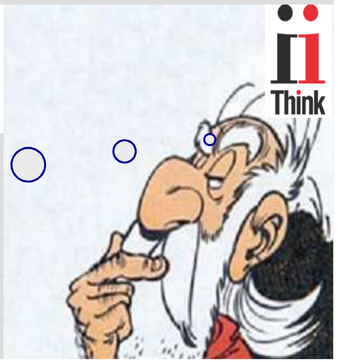
$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w} \quad \text{für alle } \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$$

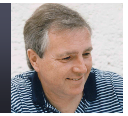
$$(\lambda\vec{u})\times\vec{v}=\lambda(\vec{u}\times\vec{v}) \quad \text{für alle } \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

*) Teutates : kelt. Stammesgott

× *

Beim Teutates, die spinnen die Mathematiker !

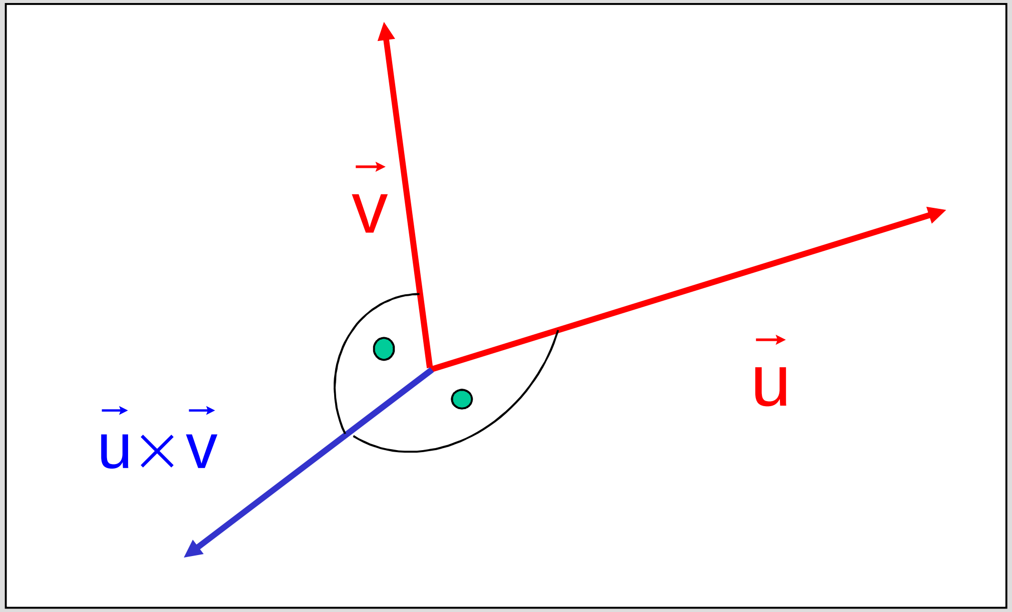


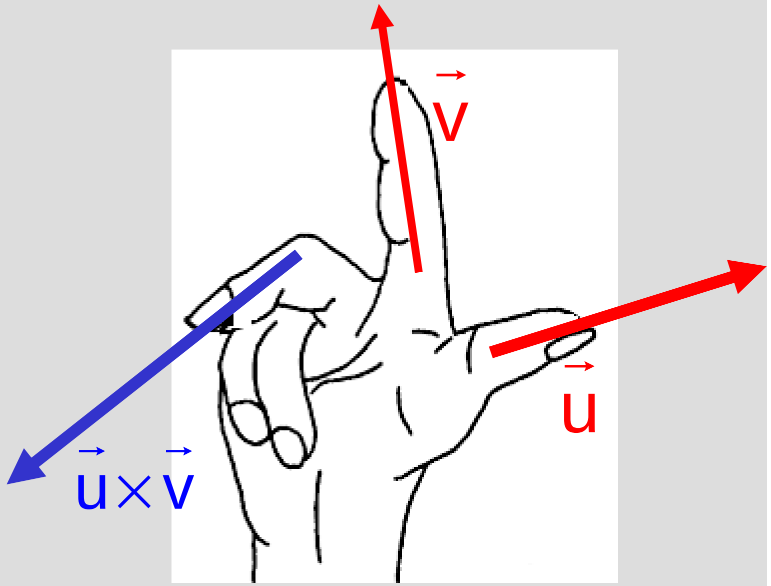


Die Eigenschaften des Vektorprodukts

$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ und $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

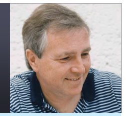
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$





Die Richtung von $\vec{u} \times \vec{v}$ ergibt sich aus der

Dreifingerregel der rechten Hand !



Der Betrag des Vektorprodukts

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix} u_2v_3-u_3v_2 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ u_1v_2-u_2v_1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2=(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2$$

$$u_2{}^2v_3{}^2-2u_2v_3u_3v_2+u_3{}^2v_2{}^2$$

$$+u_3{}^2v_1{}^2-2u_3v_1u_1v_3+u_1{}^2v_3{}^2$$

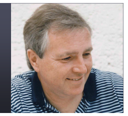
$$+u_1{}^2v_2{}^2-2u_1v_2u_2v_1+u_2{}^2v_1{}^2$$

$$=(u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2)(v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2)-(u_1v_1+u_1v_1+u_1v_1)^2$$

$$=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\left(1-\frac{\vec{u}*\vec{v}}{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2}\right)$$

$$=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\alpha$$

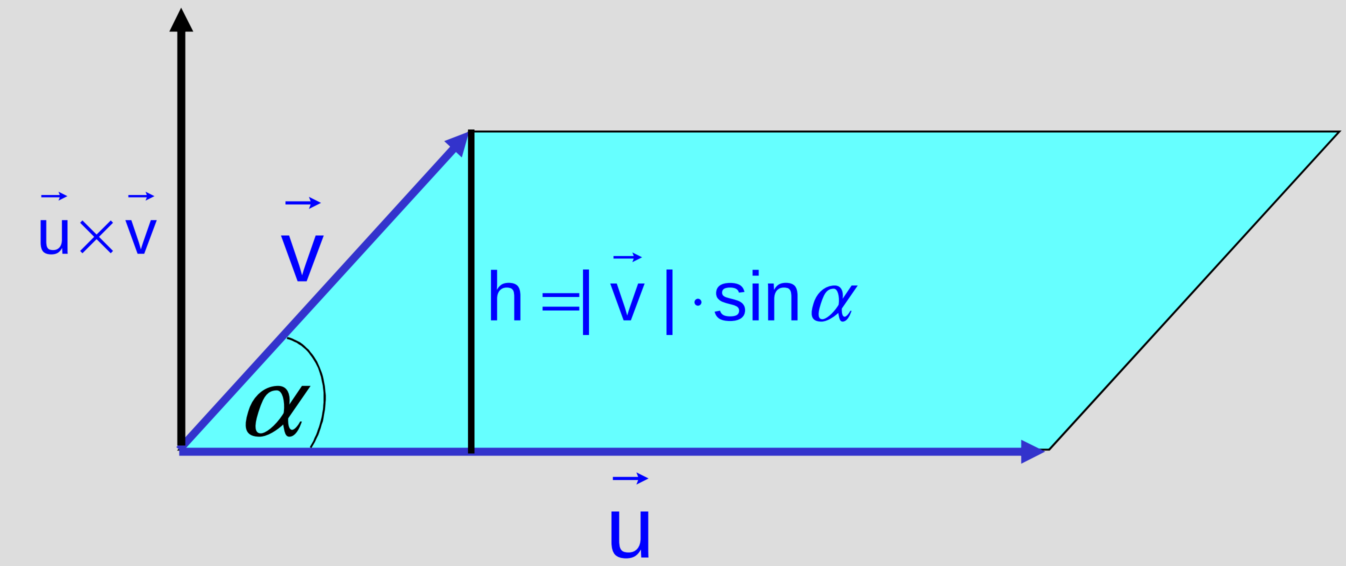
$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\alpha$$



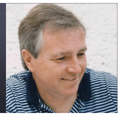
Der Betrag des Vektorprodukts

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

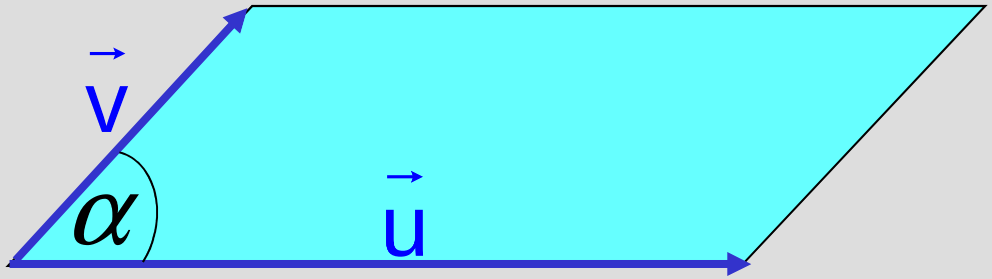
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$$



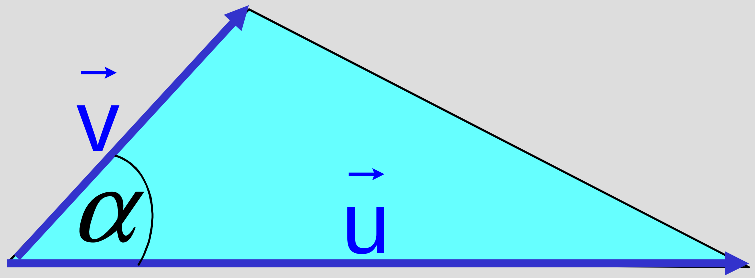
$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms



Flächeninhalte vektoriell

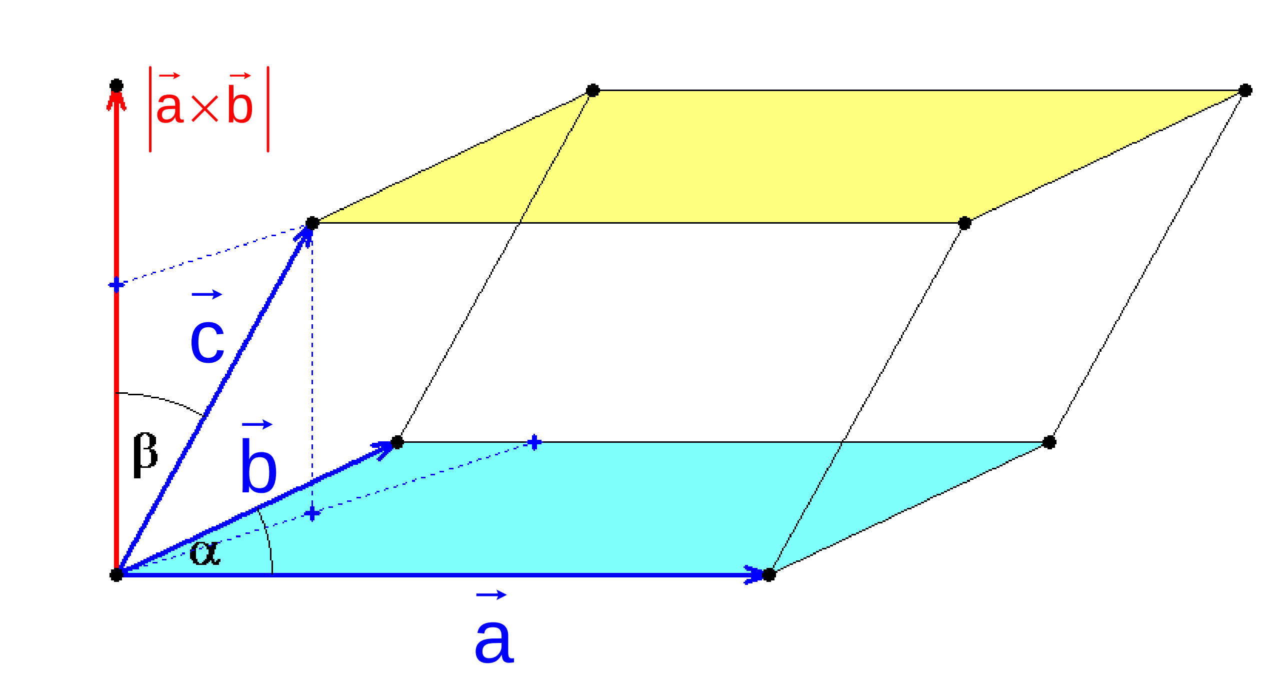


$$A_{Parallelogramm} = \left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$$



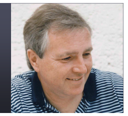
$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$$

Rauminhalte vektoriell - Spatprodukt

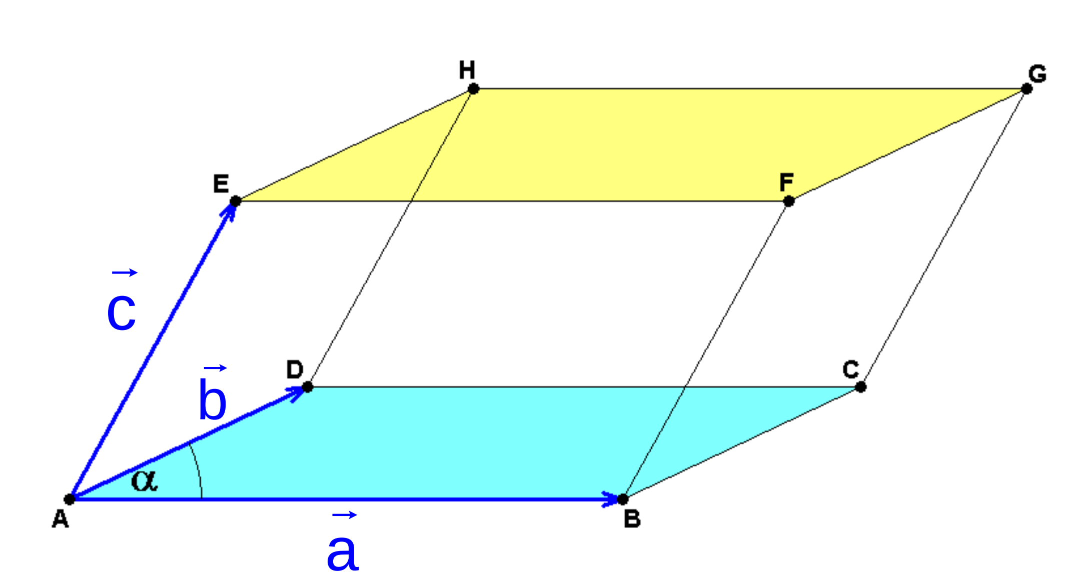


$$A_{Spat} = G \cdot h = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot h = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\beta \;= (\vec{a}\times\vec{b}) * \vec{c}$$

$$V_{Spat} = (\vec{a}\times\vec{b}) * \vec{c}$$



Rauminhalte vektoriell - Spatprodukt

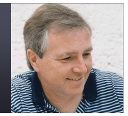


$$V_{Spat} = \left|(\vec{a}\times\vec{b}) * \vec{c}\right|$$

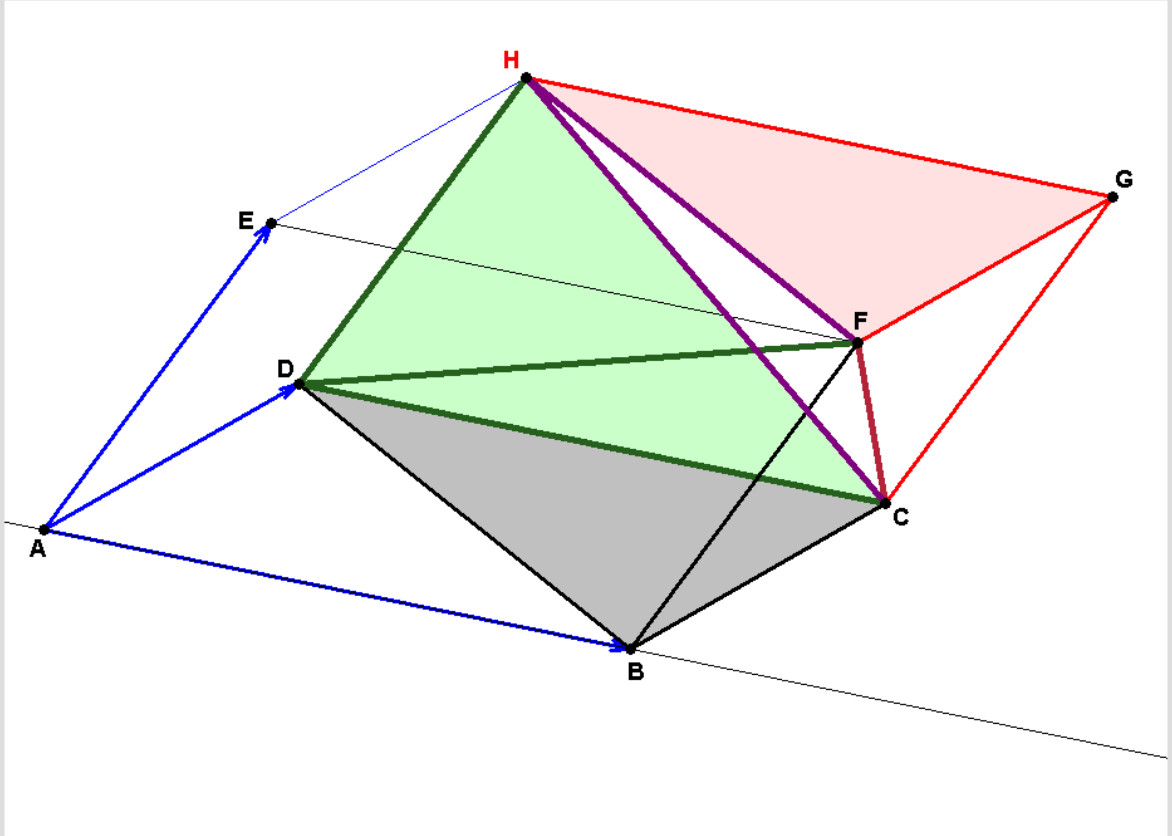
$$= \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b}) * \vec{c} &= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \\ &\quad + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 \\ &\quad + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$



Rauminhalte vektoriell - Pyramidenvolumen



Ein halber Spat besteht aus drei volumengleichen Pyramiden :

$P_1(F;G;H;C)$

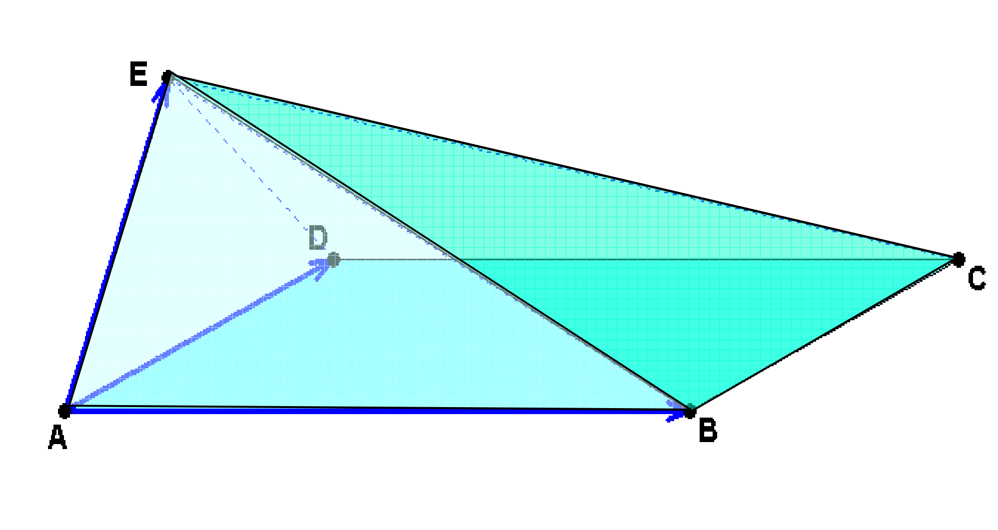
$P_2(B;C;D;F)$

$P_3(C;D;H;F)$

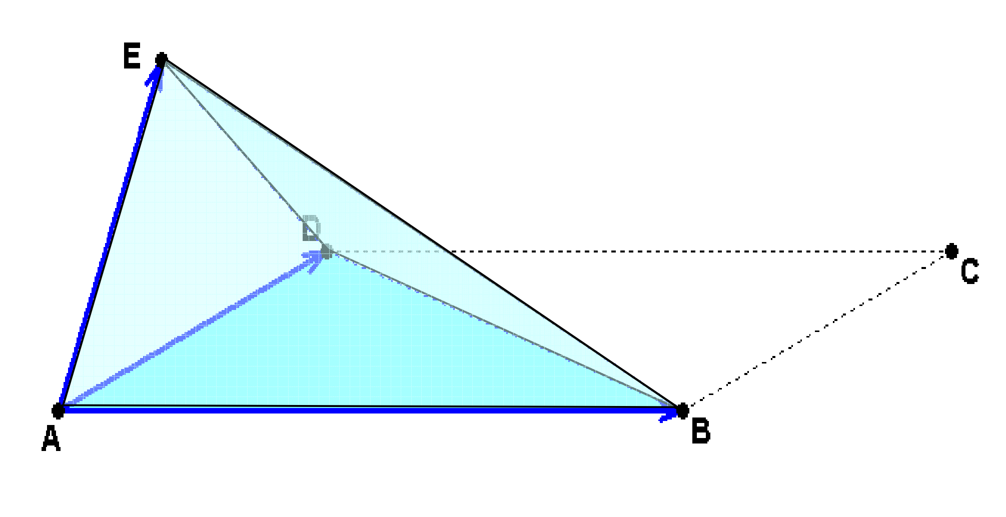
$P_1 = P_2$ weil $G_1(H;F;G) = G_2(B;C;D)$ und $h_1 = h_2$

$P_1 = G_3$ weil $G_1(C;G;H) = G_3(C;D;H)$ und $h_1{*} = h_3{*}$

Rauminhalte vektoriell - Pyramidenvolumen



$$V_{Pyramide4} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} \right|$$



$$V_{Pyramide3} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{6} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} \right|$$