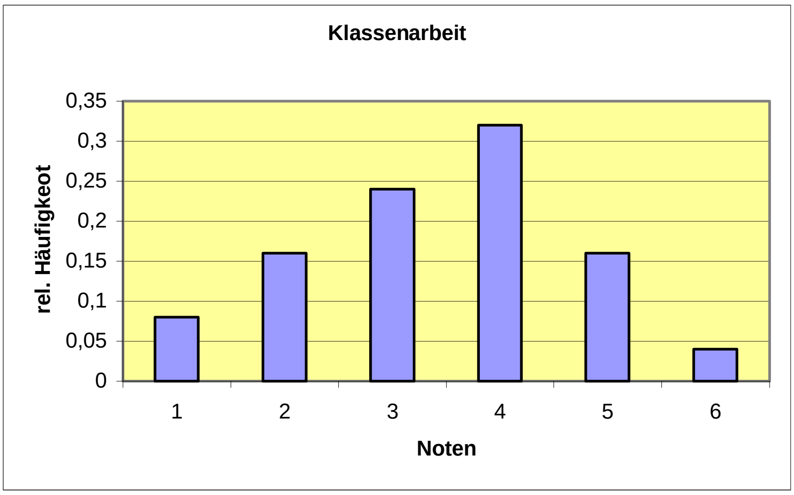
Lösung der Aufgaben aus Kapitel I-III

Kapitel 1



Aufgabe 1.1: Trage die fehlenden relativen Häufigkeiten als reine Brüche und als % in die Rechtecke ein!

Aufgabe 1.2: Es wurde mit zwei Würfeln gewürfelt; die Summe der Augenzahlen wurde jeweils beobachtet:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Absolute Häufigkeit	9	15	28	35	42	56	49	40	32	19	10
Relative Häufigkeit											

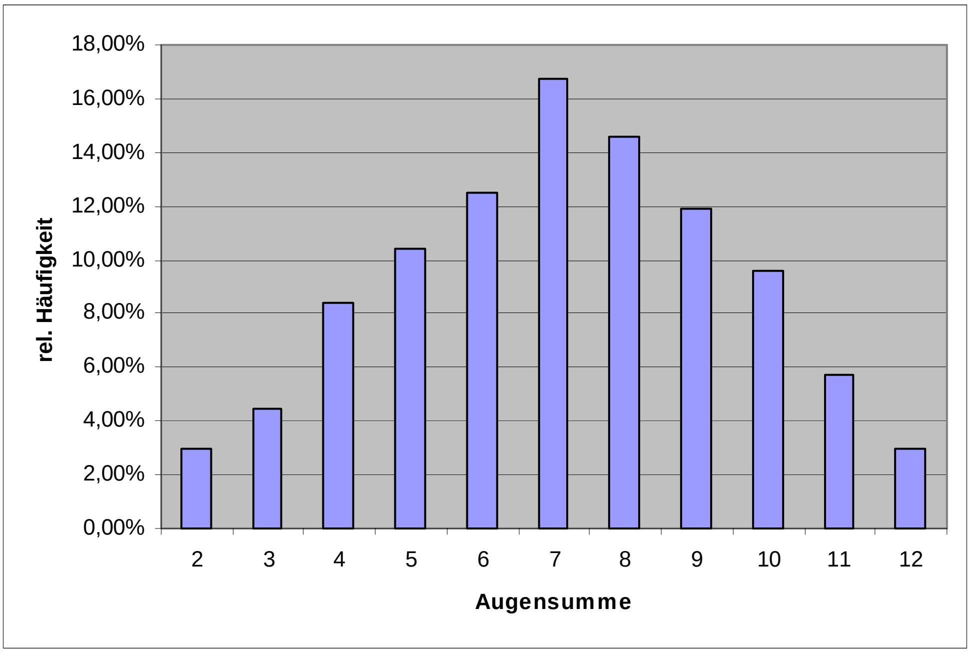
(a) **Was sind hier: Merkmalsträger, Merkmal, Merkmalsausprägungen, Umfang der Erhebung?**

Merkmalsträger : Die beiden Würfel
Merkmal : Augensumme
Merkmalsausprägungen : 2,3,4,…….11,12
Umfang der Erhebung : 335

(b) **Trage die relativen Häufigkeiten ein und stelle das Resultat graphisch dar!**

Augen-summe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Absolute Häufigkeit	9	15	28	35	42	56	49	40	32	19	10	**335**

Relative Häufigkeit	3,0%	4,5%	8,4%	10,4%	12,5%	16,7%	14,6%	11,9%	9,6%	5,7%	3,0%	≈ 100%



Aufgabe 1.3: (a) **Berechne den arithmetischen Mittelwert der Noten (oft auch Notendurchschnitt genannt) in dem Einführungsbeispiel!**

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	2	4	6	8	4	1

$$\bar{n} = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 6\cdot 3 + 8\cdot 4 + 4\cdot 5 + 1\cdot 6}{25} = \frac{86}{25} = 3{,}44$$

(b) Vergleiche den obigen Notenspiegel (aus der 1. Klassenarbeit) mit den hier folgenden der 2. und 3. Klassenarbeit!

2. Klassenarbeit:

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	4	3	5	7	3	3

$$\bar{n} = \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 3 + 7\cdot 4 + 3\cdot 5 + 3\cdot 6}{25} = \frac{86}{25} = 3{,}44$$

3. Klassenarbeit:

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	0	3	10	10	2	0

$$\bar{n} = \frac{0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 6}{25} = \frac{86}{25} = 3{,}44$$

Aufgabe 1.4: Diese Maße sind von Menschen ersonnen und nicht vom Himmel gefallen. Was hat man sich bei ihrer Festlegung wohl gedacht?

(a) **Warum hat man wohl die <u>Quadrate</u> der Abweichungen gebildet und nicht die Abweichungen selbst addiert?**

Mit den Quadraten erhalte ich immer positive Zahlen, sonst würden sich die Abweichungen nach oben und unten gegenseitig aufheben und im Extremfall würde man sogar 0 erhalten.

(b) **Warum ist es sinnvoll, durch n zu teilen?**
Damit erhält man den Mittelwert der Abweichungen

(c) **Welchen Vorteil hat die Standardabweichung gegenüber der Varianz? Denkanstoß: Angenommen, die Merkmalswerte wären <u>Zeiten</u> (z.B. $x_1 = 8{,}2\,\mathrm{sec}$; $x_2 = 7{,}8\,\mathrm{sec}$). Welche <u>Einheiten</u> hätten dann Varianz und Standardabweichung?**

Die Einheit der Varianz wäre dann sec^2, während die Standardabweichung auch wieder die Einheit sec hat.

Aufgabe 1.5: **Berechne bei jeder der drei Klassenarbeiten**

(a) **die Varianz**

(b) **die Standardabweichung!**

1. Klassenarbeit:

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	2	4	6	8	4	1

$\bar{n} = 3{,}44$

$$s^2 = \frac{2(1-3.44)^2 + 4(2-3{,}44)^2 + 6(3-3{,}44)^2 + 8(4-3{,}44)^2 + 4(5-3{,}44)^2 + 1(6-3{,}44)^2}{25} \approx 4{,}7$$

$$\sigma \approx \sqrt{4{,}7} \approx 2{,}07$$

2. Klassenarbeit:

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	4	3	5	7	3	3

$\bar{n} = 3{,}44$

$$s^2 = \frac{4(1-3.44)^2 + 3(2-3,44)^2 + 5(3-3,44)^2 + 7(4-3,44)^2 + 3(5-3,44)^2 + 3(6-3,44)^2}{25} \approx 2,6$$

$$\sigma \approx \sqrt{2,6} \approx 1,6$$

3. Klassenarbeit

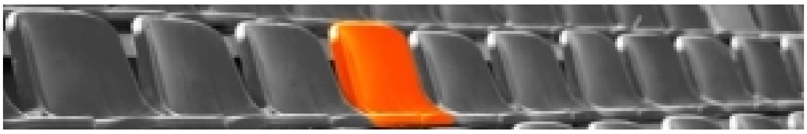
Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	0	3	10	10	2	0

$$\overline{n} = 3,44$$

$$s^2 = \frac{0(1-3.44)^2 + 3(2-3,44)^2 + 10(3-3,44)^2 + 10(4-3,44)^2 + 2(5-3,44)^2 + 0(6-3,44)^2}{25} \approx$$

Hinweis: EXCEL besitzt die Funktionen MITTELWERT und STABWN mit denen man die Werte direkt berechnen kann.
Bitte macht euch mit diesen EXCEL-Funktionen vertraut.

Kapitel 2

Problem 2.1: 

10 Leute sollen auf 10 nebeneinander stehenden Stühlen Platz nehmen. Sie können sich nicht einigen, wer neben wem sitzt, und beginnen schließlich eine Diskussion, wie viel mögliche Sitzordnungen es überhaupt gibt.

Aufgabe 2.1: Entwickle in Form eines kleinen mathematischen Aufsatzes die Lösung des Problems! Wie lange bräuchten sie, wenn sie jede Sekunde eine neue Sitzordnung einnehmen, keinen Schlaf brauchen, Essen und Trinken ausfallen lassen, nicht auf die Toilette müssen, usw.?

Ich habe 10 Möglichkeiten, eine Person für den ersten Sitz auszuwählen. Dann habe ich noch 9 Möglichkeiten eine Person für den zweiten Sitz auszuwählen.
→ Ich habe also $10 \cdot 9 = 90$ Möglichkeiten die ersten beiden Stühle zu besetzen!

Insgesamt habe ich dann insgesamt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 = 10! = 3628800$ Möglichkeiten die Personen anzuordnen (zu permutieren)

Problem 2.2: 10 Personen wählen aus ihren Reihen einen Sprecher, einen ersten und einen zweiten Stellvertreter. Wie viel Möglichkeiten gibt es, die 3 Ämter zu besetzen?

Aufgabe 2.2: Entwickle in Form eines kleinen mathematischen Aufsatzes die Lösung des Problems!

Ich habe 10 Möglichkeiten, eine Person für den Sprecher auszuwählen. Dann habe ich noch 9 Möglichkeiten eine Person für den ersten Sprecher auszuwählen und noch 8 Möglichkeiten eine Person für den zweiten Sprecher auszuwählen.

→ Ich habe also $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Möglichkeiten, diese Posten zu besetzen. zu besetzen!

Ich habe also $\frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10$ Möglichkeiten

Problem 2.3: 10 Personen in einem Zeltlager haben an einem bestimmten Tag 4 Pöstchen zu vergeben: Z.B. soll einer den Platz reinigen, einer soll Holz besorgen, einer soll einkaufen gehen, einer soll kochen. Es darf auch sein, dass eine Person zwei oder drei Pöstchen oder gar alle vier wahrnimmt! Wie viele Möglichkeiten der Verteilung gibt es?

Aufgabe 2.3: Entwickle in Form eines kleinen mathematischen Aufsatzes die Lösung des Problems!

Ich habe 10 Möglichkeiten für die Auswahl des ersten Pöstchens, 10 Möglichkeiten für die Auswahl des zweiten Pöstchens u.s.w.

→ Ich habe $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$ Möglichkeiten die 4 Pöstchen zu vergeben.

Problem 2.4: Aus 10 SchülerInnen sollen 4 ausgewählt werden, die ein Rateteam bilden. Wie viele Konstellationen gibt es aus den 10 SchülerInnen 4 auszuwählen?

Aufgabe 2.4: Entwickle in Form eines kleinen mathematischen Aufsatzes die Lösung des Problems!

Ich habe 10 Möglichkeiten den/die erste(n) SchülerIn auszuwählen.
Ich habe 9 Möglichkeiten den/die zweite(n) SchülerIn auszuwählen.
Ich habe 8 Möglichkeiten den/die dritte(n) SchülerIn auszuwählen.
Ich habe 7 Möglichkeiten den/die vierte(n) SchülerIn auszuwählen.

D.h. es gibt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ eine Auswahl nach dem obigen Schema zu treffen.
Da es aber auf die Reihenfolge nicht ankommt kann ich diese 4 ausgewählten SchülerInnen auf $4! = 24$ Arten permutieren, ohne dass sich das Rateteam verändert.

→ Es gibt also $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ Möglichkeiten das Rateteam zu bilden.

Etwas eleganter geschrieben:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \binom{10}{4}$$

Es gibt also „10 über 4“ Möglichkeiten 4 Dinge aus 10 Dingen auszuwählen, wenn es auf die Reihenfolge nicht ankommt.

Aufgabe 2.5: **Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tippzettel beim Fußball-Toto auszufüllen?**
(Untereinander stehen 10 Spiele, bei jedem muss 0 oder 1 oder 2 angekreuzt werden?

$N=3^{10}=59049$

Aufgabe 2.6: Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Lotterieschein „6 aus 49“ auszufüllen? (Von 49 Zahlen müssen 6 angekreuzt werden.)

$$N=\binom{49}{6}=\frac{49!}{6!\cdot(49-6)!}=13983816$$

Aufgabe 2.7: Ein Handlungsreisender will auf einer Rundreise in irgend einer Reihenfolge die Städte Leipzig, Dresden, Chemnitz, Halle, Naumburg, Erfurt und Zwickau besuchen.

(a) Wie viele mögliche Wege gibt es ?

$N=7!$

(b) Wie viele Wege gibt es, wenn er auf jeden Fall in Leipzig die Reise antritt und am Ende dorthin wieder zurückkehrt?

$N=6!$

Aufgabe 2.8: **The English alphabet has 26 letters of which 5 are vowels.**

a) How many 5-letter words containing three different consonants and two different vowels can be formed?

$$N=\binom{21}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot 5!=1.596.000$$

b) How many of them contain the letter b ?

$$N=\binom{20}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 5!=228.000$$

c) How many of them contain the letters b and c ?

$$N=\binom{19}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot 5!=22.800$$

d) How many of them begin with b and contain the letter c ?

$$N=\binom{19}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot 4! = 4.700$$

e) How many of them begin with a and end with b ?

$$N=\binom{4}{1}\cdot\binom{20}{2}\cdot 3! = 4.560$$

f) How many of them contain the letters a, b, c ?

$$N=\binom{4}{1}\cdot\binom{19}{1}\cdot 5! = 9.120$$

Aufgabe 2.9: **Simplify:**

$$\text{a)}\ \frac{(n+1)!}{n!}=n+1 \quad \text{b)}\ \frac{n!}{(n-2)!}=(n-1)\cdot n$$

$$\text{c)}\ \frac{(n-1)!}{(n+2)!}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{d)}\ \frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}=(n-r)(n-r+1)$$

Aufgabe 2.10:

a) In how many ways can 3 boys and 2 girls sit in a row

N=5!

b) In how many ways can they sit in a row if the boys and the girls are each to sit together ?

There are two ways to distribute them according to sex : bbbgg or ggbbb
In each case the boys can sit in 3! ways and the girls in 2! ways.
Thus altogether we have

$N=2\cdot 3!\cdot 2! = 14$ ways.

c) In how many ways can they sit in a row if just the girls are to sit together ?
There are 4 ways to distribute them according to sex : ggbbb bggbb bbggb bbbgg
Thus altogether we have
$N=4\cdot 3!\cdot 2! = 48$ ways.

Kapitel 2

Aufgabe 3.1: Bestätige diese beiden Feststellungen!

Bei einem einfachen Würfelexperiment kann ich z.B. beobachten

a) die Augenzahl S={1,2,3,4,5,6} #S=6

b) die Eigenschaft der Augenzahl prim zu sein $S = \{p; \bar{p}\}$ $\#S = 2$

c) die Eigenschaft der Augenzahl gerade oder ungerade zu sein $S = \{u; g\}$ $\#S = 2$

….

Die Feststellung der Länge von Gegenständen ist ein ZF-Experiment mit unendlicher Ergebnismenge, da prinzipiell alle rationalen bzw. alle reellen Zahlen sein können.

Aufgabe 3.2: Bestimme „den" Ergebnisraum des folgenden Zufallsversuchs:

(a) Ein Passant wird zufällig ausgewählt und sein Geburts**tag** (tt.mm.)wird festgestellt
S={01.01.; ………..;31.12.} #S=366

(b) Ein Passant wird zufällig ausgewählt und sein Geburts**datum** (tt.mm.jjjj) wird festgestellt
S={01.01.1890 ; ………., Datum heute} #S=?
nicht eindeutig zu ermitteln.

(c) Ein Passant wird zufällig ausgewählt und sein Gewicht wird festgestellt
S={ ; ………., Datum heute} #S=?
nicht eindeutig zu ermitteln.

(d) Bei der Lottoziehung werden 6 aus 49 Kugeln zufällig ausgewählt und die gezogenen Zahlen werden festgestellt.
S={ {1,2,3,4,5,6}; ………..;{44,45,46,47,48,49} } #S=13983816

(e) Ein Neugeborenes wird zufällig ausgewählt und das Geschlecht wird festgestellt.
S={m,w} #S=2

(f) Ein Fußballspiel wird ausgewählt und das Ergebnis wird festgestellt.
S={0:0.; 1:0.; 0:1.; ………..;20:0} #S=?
nicht eindeutig zu ermitteln.

(g) Ein Würfel wird dreimal nacheinander geworfen, die Augenzahl wird jeweils in der Reihenfolge des Auftretens notiert.
S={(1|1|1); ………(6|6|6)} $\#S=3^6=729$

(h) Mit einem Computer werden natürliche 4-stellige natürliche Zufallszahlen erzeugt und die Zahl wird festgestellt.
S={0000; ………;9999} $\#S=10^4=10000$

(i) Mit einem Computer werden natürliche Zufallszahlen erzeugt und es wird festgestellt ob die Zahl prim ist oder nicht.
$S = \{p; \bar{p}\}$ #S=2

(j) Mit einem Computer werden natürliche Zufallszahlen erzeugt und es wird festgestellt ob die Zahl durch 3 teilbar ist oder nicht.

$S=\{t;\bar{t}\}$ #S=2

(k) Ein Regentropfen wird beobachtet und es wird festgestellt, ob er auf eine vorgegebene Fläche auftrifft oder nicht.

$S=\{tr;\overline{tr}\}$ #S=2

Aufgabe 3.3: Wie groß sind bei folgenden Zufallsversuchen die Wahrscheinlichkeiten der angegebenen Ergebnisses? Falls möglich, bestimme sie, andernfalls beschreibe, wie man sie finden könnte!

(a) Zufallsversuch: Doppelwurf mit idealen Würfeln. Reihenfolge unwichtig, beide Würfel ununterscheidbar.

$S=\left\{\{1\};...;\{6\};\{1;2\}....\{1;6\};\{2;3\}....\{2;6\};.......\{4;5\};\{4;6\};\{5;6\}\right\}$ #S=21

Ergebnis e_1: Sechserpasch $P(e_1)=\frac{1}{36}$

Ergebnis e_2: eine Sechs und eine Eins $P(e_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

zur Kontrolle : $P(e_1)+....P(e_{21})=\frac{6}{36}+15\cdot\frac{2}{36}=1$

(b) Zufallsversuch: Ziehen einer Karte in einem „einwandfreien" Kartenspiel.

Ergebnis e: Herz Sieben wird gezogen. $P(e)=\frac{1}{32}$

(c) Zufallsversuch: Lottospiel (Abgabe eines Tipps)

#S=13983816

Ergebnis e: „Sechs Richtige" $P(e)=\frac{1}{13983816}$

(d) Zufallsversuch: Werfen eines Reißnagels auf einer Tischplatte, wobei entweder K = Kopf- oder S = Seitenlage entsteht.

Ergebnis e: Reißnagel landet auf dem Kopf

$P(e)=?$ Kommt auf den Reißnagel an.

Die relative Häufigkeit bei einer großen Anzahl von Würfen gibt einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit $P(e)$

Aufgabe 3.4: 8 mal nacheinander wird eine „ideale" Münze geworfen. Es werden der Reihe nach die Achttupel der Einzelergebnisse notiert, z.B. (K; K; W; K; W; W; W; K). Alle diese Zehntupel sind die Ergebnisse dieses **„mehrstufigen" Zufallsversuchs**.

(Übrigens: Der Euro, zumindest der deutsche Euro, soll nach letzten Zeitungsberichten nicht „ideal"sein, die Wahrscheinlichkeiten *beim einmaligen Werfen* für W und Z sollen nicht gleich sein, also wäre das einmalige Werfen einer deutschen Euromünze kein Laplace-Versuch!!)

(a) Wie viel Elemente hat S? D.h. wie viel Ergebnisse hat dieser 8stufige Zufallsversuch?

S={ (K|K|……..|K);………… ;(W|W|……..|W)} $\#S=2^6=64$

(b) Handelt es sich um einen Laplace-Versuch? Ja, $P(e_i)=\frac{1}{64}$ für alle i

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis e = (W |W | Z| W| Z| Z| Z| W)?
Vereinbarung: Wir schreiben künftig kurz: WWZWZZZW.

$$P(e)=\frac{1}{64}$$

Aufgabe 3.5: Ein Laplace-Versuch hat n mögliche Ergebnisse. Er wird m mal nacheinander ausgeführt. („m-stufiger Zufallsversuch") Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis dieses m-stufigen Versuchs, d.h. für ein spezielles m-tupel?
Entwickle eine Formel!

Die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis des einstufigen Lalace-Experiments ist dann

$$P(e_i)=\frac{1}{n}$$

Nach der Pfadmultiplikationsregel ist dann die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisse e_{mi} bei einem m-stufigen Laplace-Experiment $P(e_{mi})=\left(\frac{1}{n}\right)^m=\frac{1}{n^m}$

Was bei einem *Laplace-Versuch*, der m mal nacheinander ausgeführt wird, einfach war, ist komplizierter, wenn

- ein *Nicht-Laplace*-Versuch m mal nacheinander ausgeführt wird,
- oder sogar *ganz unterschiedliche* Zufallsversuche nacheinander ausgeführt werden
  z.B. erst Münze werfen, dann Reißnagel werfen, dann Karte ziehen...
- und ganz besonders dann, wenn die Wahrscheinlichkeit auf einer bestimmten Stufe auf irgend eine mehr oder weniger komplizierte Art *von den vorausgegangenen Ergebnissen abhängt*... Uff, das war kompliziert! Kannst du mal dafür ein Beispiel finden??

Aufgabe 3.6: Der Reißnagel mit P(K) = 0,4 und P(S) = 0,6 wird viermal nacheinander geworfen.

(a) Welche Ergebnisse sind denkbar?

S={ KKKK ; KKKS ;………….SSSS } $\#S=2^4=16$

(b) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse?

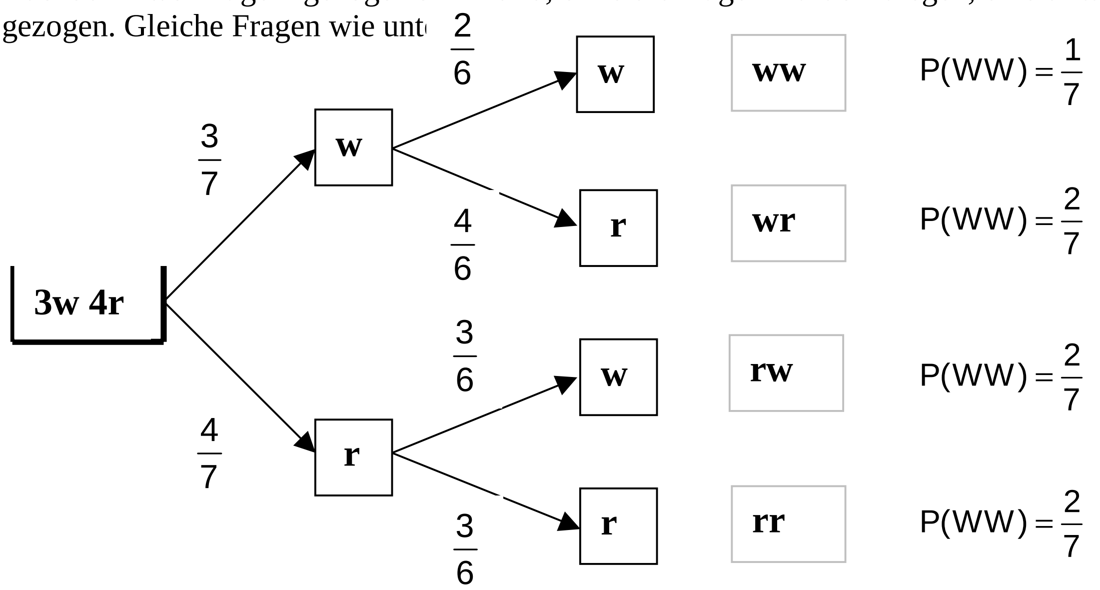
$$P(KKKK)=0{,}4^4 \quad P(KKKS)=0{,}4^3\cdot 0{,}6^1 \quad P(KSKS)=0{,}4^2\cdot 0{,}6^2$$
$$P(SSSS)=0{,}6^4$$

Aufgabe 3.7: Eine Urne enthält 3 weiße und 4 rote Kugeln, die sich weiter nicht unterscheiden. Wenn man *einmal* eine Kugel zieht, sind also nur zwei Ergebnisse möglich: w und r.

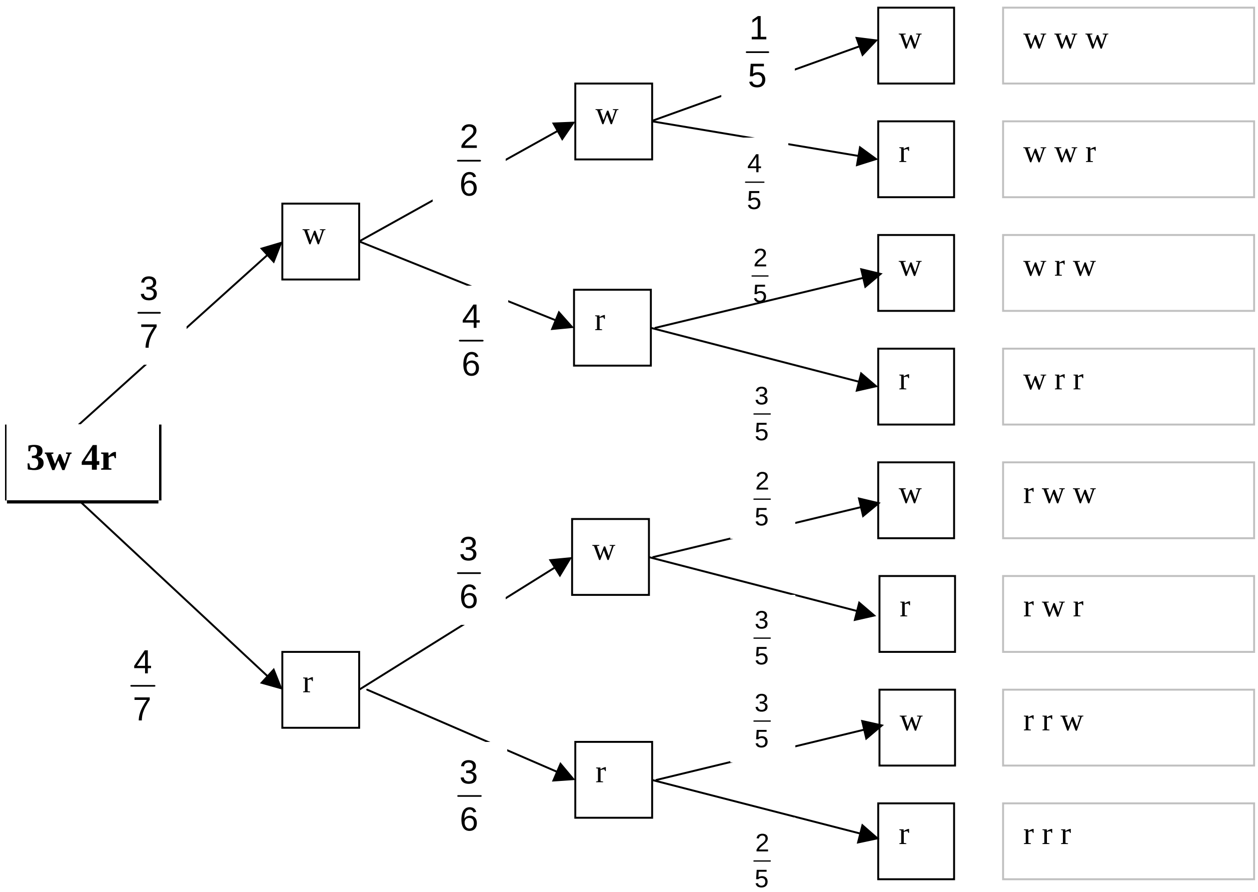
(a) Man entnimmt eine Kugel zufällig, notiert die Farbe, mischt durch und zieht nochmals eine Kugel, ohne die erste zurückzulegen.
Zeichne ein Baumdiagramm und notiere die Wahrscheinlichkeiten an den betreffenden Zweigen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse mit der Pfadregel!

(b) Nachdem zwei Kugeln gezogen sind, wird, ohne die Kugeln zurückzulegen, eine dritte gezogen. Gleiche Fragen wie unt

a)



b)



$P(www) = \frac{1}{35} \qquad P(wwr) = \frac{4}{35} \qquad P(wrw) = \frac{4}{35} \qquad P(wrr) = \frac{6}{35}$