Lösungen zu den Aufgaben Teil 3

Doppelwurf mit idealen Würfeln. Beobachtet wird, ob die Augensumme eine Primzahl ist. (Die Reihenfolge interessiert uns nicht.)

Hier gibt es mehrere passende Augenkombinationen:

zwei Einsen
eine Eins, eine Zwei
eine Eins, eine Vier
eine Eins, eine Sechs

Aufgabe 4.1: Vervollständige diese Liste!

zwei Einsen
eine Eins, eine Zwei
eine Eins, eine Vier
eine Zwei, eine Drei
eine Eins, eine Sechs
eine Zwei, eine Fünf
eine Drei, eine Vier
eine Fünf, eine Sechs

(a) Wie viel Elemente enthält sie? #L=8

(b) Wie viel Elemente hat S? $S = \{prim;\overline{prim}\}$ #S=2

(c) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Augenkombinationen?

P(zwei Einsen)=$\frac{1}{36}$ P(eine Eins, eine Zwei)=…P(eine Fünf, eine Sechs)= $\frac{2}{36}$

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, als Augensumme eine Primzahl zu erhalten?

$$p(prim) = \frac{1}{36} + 7 \cdot \frac{2}{36} = \frac{15}{36} \ ; \ p(\overline{prim}) = \frac{21}{36}$$

Aufgabe 4.2: Formuliere die Gegenereignisse von E:

(a) Zufallsversuch: 5 mal nacheinander würfeln, die Augenzahlen der Reihe nach aufschreiben.
E: „Es kommt keine 6 vor."
$\overline{E}$: Es kommt mindestens eine 6 vor"

(b) Zufallsversuch: 30 zufällig vorbeikommende Passanten nach ihrem Geburtstag (tt.mm) fragen.
Ergebnisse: die 30-tupel der Geburtstage(tt.mm)
E: „Alle haben an verschiedenen Tagen Geburtstag"
$\overline{E}$:„Mindestens zwei haben an einem gleichen Tag (tt.mm) Geburtstag"

Aufgabe 4.3: Aus einer Urne mit 50 gleichartigen Kugeln wird nach einem Zufallsverfahren eine gezogen. Die Kugeln tragen die Nummern 1, 2, ... , 50.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E:

„Die Nummer auf der gezogenen Kugel ist eine Primzahl.“

S ={1,2,………..49,50} E ={2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43} #E=15

P(E)= $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 30\%$

Aufgabe 4.4: Für einen gezinkten Würfel hat man (durch eine umfangreiche Versuchsserie) die folgenden Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten ermittelt:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0,21	0,15	0,13	0,20	0,19	0,12

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ereignis E: „Augenzahl gerade“ ein? Schreibe E auch als Menge auf !

E ={2,4,6} P(E)=P(2)+P(4)+P(6)=0,15+0,2+0,12=0,47

Aufgabe 4.5: Der gezinkte Würfel aus Aufgabe 4.4 wird 5 mal nacheinander geworfen, die Augenzahlen werden der Reihe nach notiert. Die Ergebnisse dieses Zufallsversuchs sind also 5-tupel der natürlichen Zahlen von 1 bis 6.

(a) Wie viel Ergebnisse gehören zu dem Ereignis E: „Es kommt keine 6 vor“?
#E=5^5=3125

(b) Wie wahrscheinlich ist das Ereignis E?

in 4.4) gilt $P(\overline{6}) = 0{,}88$

Das ist ein 5-Stufiges Bernoulli-Experiment mit $P(\overline{6}) = 0{,}88$ und $P(6) = 0{,}12$

Pfadregel: P(E)= $0{,}88^5 \approx 0{,}528$

Aufgabe 5.1: Der Zufallsversuch zur Bestimmung von π wird *5 mal nacheinander* durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

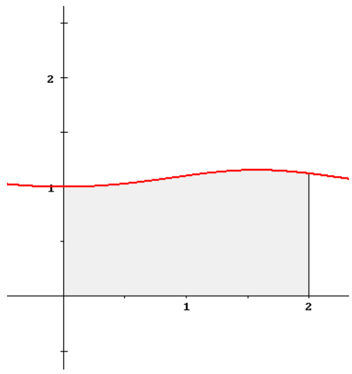
(a) dass jedes mal der Kreis (wir meinen damit: das *Kreisinnere*) getroffen wird

$$P(TTTTT)=\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 \approx 0{,}52\%$$

(b) dass höchstens einmal der Kreis getroffen wird?

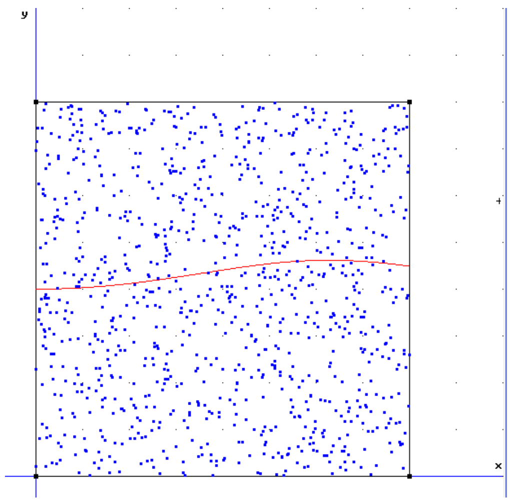
$$P(\text{höchstens ein Treffer}):=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{\pi}{9}\right)^1\cdot\left(1-\frac{\pi}{9}\right)^4 \approx 31{,}3\%$$

Aufgabe 5.2 Das nebenstehende Bild zeigt einen Ausschnitt des Funktionsgraphen der Funktion $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}25\cdot(\sin(x))^2}}$ im Intervall [0;2]. Die Bestimmung einer Stammfunktion zu f ist nicht möglich.
Wie lässt sich der markierte Flächeninhalt mit der Monte-Carlo-Methode bestimmen?



Wir erzeugen eine entsprechende Zielscheibe $0 \le x \le 2$ und $0 \le y \le 2$
Mit einem Zufallsgenerator erzeugen wir „Schüsse“ auf die Scheibe.
Die relative Häufigkeit der Treffer entspricht dem Verhältnis der markierten Fläche zur Gesamtfläche

$$h_n(\text{Treffer})=\frac{A}{4} \;\Rightarrow\; A=4\cdot h_n(\text{Treffer})$$



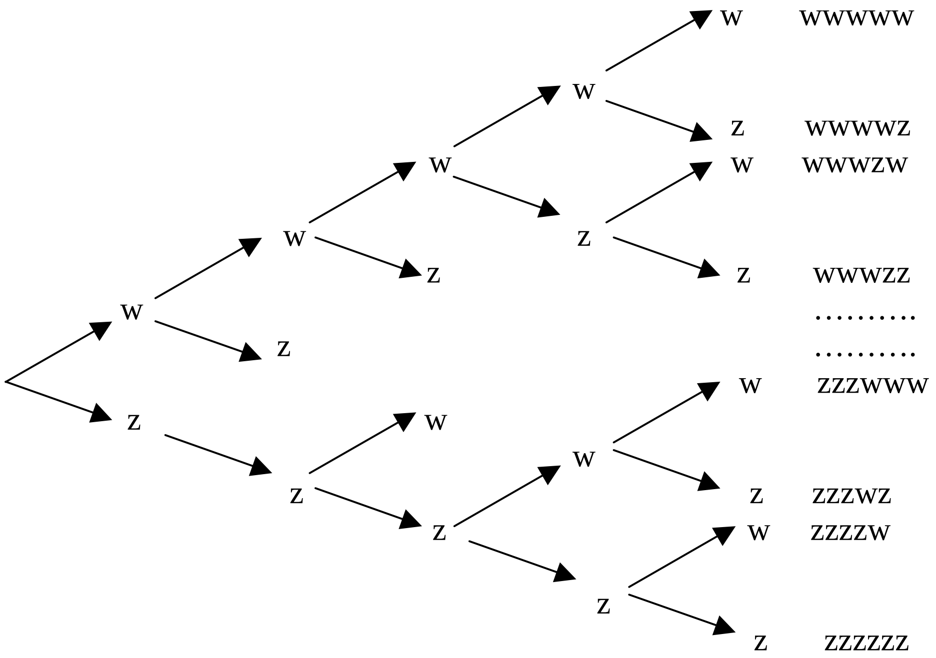
Experimentiert mit dem DERIVE-Worksheet ***Simulation_Monte_Carlo_2.dfw***

Mögliches Ergebnis:

$$h_n(\text{Treffer})=\frac{1091}{2000} \;\Rightarrow\; A=\frac{1091}{500}\approx 2{,}18$$

Aufgabe 6.1:
Nehmen wir die nicht-ideale Münze aus Kapitel III: $P(W) = 0{,}4$ und $P(Z) = 0{,}6$.
Sie wird 5 mal nacheinander geworfen, die Einzelergebnisse werden der Reihe nach notiert. Bei diesem 5-stufigen Zufallsversuch sind die Ergebnisse also 5-tupel der Art WWZZW, usw.

(a) Stelle (wenigstens ausschnittsweise) ein Baumdiagramm dar! Wie viele Pfade hat es?



(b) Wie viele Ergebnisse hat dieser 5-stufige Versuch? $\#S=2^5=32$

(c) Wie viele Ergebnisse hätte der 8-stufige Versuch (d.h. bei 8-fachem Werfen)?
$\#S=2^8=256$

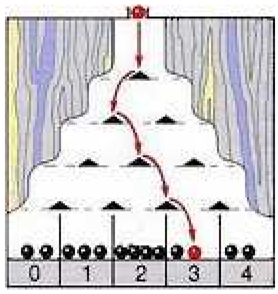
(d) Verallgemeinere auf einen n-stufigen Versuch, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Wir betrachten einen n-stufigen Bernoulli-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und Misserfolgswahrscheinlichkeit q.

$S= \{(E|E|E|E|\ldots|E)\ldots\ldots(\bar{E}|\bar{E}|\bar{E}|\ldots|\bar{E})$ $\#S=2^n$

Aufgabe 6.2: **Das Galton-Brett**

Eine Kugel fällt von oben auf eine Anordnung von „Nägeln“, bei denen sie jeweils nach links bzw. nach rechts abgelenkt werden kann. (P(l)=0,5 P(r)=0,5) Nach 4 „Stufen“ landet sie in einem der Auffangtöpfe T_0 ,…T_4



a. Wie viele Elemente hat die Ergebnismenge ?
   Schreibe einige Elemente auf!

S= {(l | l | l | l)……(r | r | r | r)} $\#S=2^4=16$

b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel den eingezeichneten Weg einschlägt ?

P((l | r| r | r))$=0,5^1\cdot 0,5^4=0,5^5=\frac{1}{32}\approx 0,031$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in dem Topf T_3 landet ?
besser ausgedrückt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
E: Die Kugel landet im Topf T_3

Im Topf T_3 landen alle kugeln, deren Weg 3 mal nach rechts und ein mal nach links führt. Da es 4 Möglichkeiten gibt die Komponente für l aus den 4 Komponenten auszuwählen ist #E=4

E={ (l | r| r | r) ; (r| l| r | r) ; (r | r| l | r) ; (r | r| r | l);

P(E)$=4\cdot 0,5^4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

Aufgabe 6.2: 75% der Bevölkerung sind einer bestimmten Meinung. 5 zufällig ausgewählte Personen werden befragt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe 0, 1, 2, 3, 4, 5 Personen diese Meinung vertreten?

Sie X die Zufallsvariable : „Anzahl der Personen in der Stichprobe, die diese Meinung vertreten“ und X=k das Ereignis „ k Personen der Stichprobe vertreten diese Meinung “

$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot p^0\cdot q^5=1\cdot 0,25^5\approx 0,001$ $P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot p^1\cdot q^4=5\cdot 0,75\cdot 0,25^4\approx 0,0146$

$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot p^2\cdot q^3=10\cdot 0,75^2\cdot 0,25^3\approx 0,088$

$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot p^3\cdot q^2=10\cdot 0,75^3\cdot 0,25^2\approx 0,264$

$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot p^4\cdot q^1=5\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^1\approx 0{,}396$

$P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot p^5\cdot q^0=1\cdot 0{,}75^5\approx 0{,}237$

Aufgabe 6.3: Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen bzw. Mädchens beträgt etwa 0,5.

(a) In einem Krankenhaus werden an einem Tag 12 Kinder geboren.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es 6 Jungen und 6 Mädchen sind?
Erfolg: Es wird ein Mädchen(Junge geboren) : n=12 p=0,5

$P(X=6)=\binom{12}{6}\cdot p^6\cdot q^6=924\cdot 0{,}5^{12}\approx 0{,}226$

(b) Bestimme die Verteilung der Geschlechter in allen Familien mit 4 Kindern!
D.h. wie viel Prozent aller Familien mit 4 Kindern haben keine Jungen / genau einen Jungen / ... / nur Jungen?
Erfolg: Es wird ein Junge geboren : n=4 p=0,5

$P(X=0)=\binom{4}{0}\cdot 0{,}5^0\cdot 0{,}5^4=0{,}0625$ $\quad P(X=1)=\binom{4}{1}\cdot 0{,}5^1\cdot 0{,}5^3=0{,}25$

$P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^2=0{,}375$ $\quad P(X=3)=\binom{4}{3}\cdot 0{,}5^1\cdot 0{,}5^3=0{,}25$

$P(X=4)=\binom{4}{4}\cdot 0{,}5^0\cdot 0{,}5^4=0{,}0625$

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Familie mit 6 Kindern mehr Jungen als Mädchen?
Erfolg: Es wird ein Junge geboren : n=6 p=0,5

$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

$P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot 0{,}5^4\cdot 0{,}5^2\approx 0{,}234$ $\quad P(X=5)=\binom{6}{5}\cdot 0{,}5^5\cdot 0{,}5^1\approx 0{,}094$

$P(X=6)=\binom{6}{6}\cdot 0{,}5^6\cdot 0{,}5^0\approx 0{,}0156$ $\quad P(X\geq 4)\approx 0{,}34$

Aufgabe 6.4: Nach Angaben der Telecom kommen nur 65% aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande.
Ein Call-Center will 100 Telefongespräche erledigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es

(a) jedesmal direkt durchkommt

Erfolg: „kommt durch“ : n=100 p=0,65

$$P(X=100)=\binom{100}{100}\cdot 0,65^{100}\cdot 0,35^{0}\approx 1.96\cdot 10^{-19}\approx 0$$

(b) kein einziges Mal direkt durchkommt,

$$P(X=0)=\binom{100}{0}\cdot 0,65^{0}\cdot 0,35^{100}\approx 2,55\cdot 10^{-46}\approx 0$$

(c) weniger als dreißig mal nicht durchkommt?

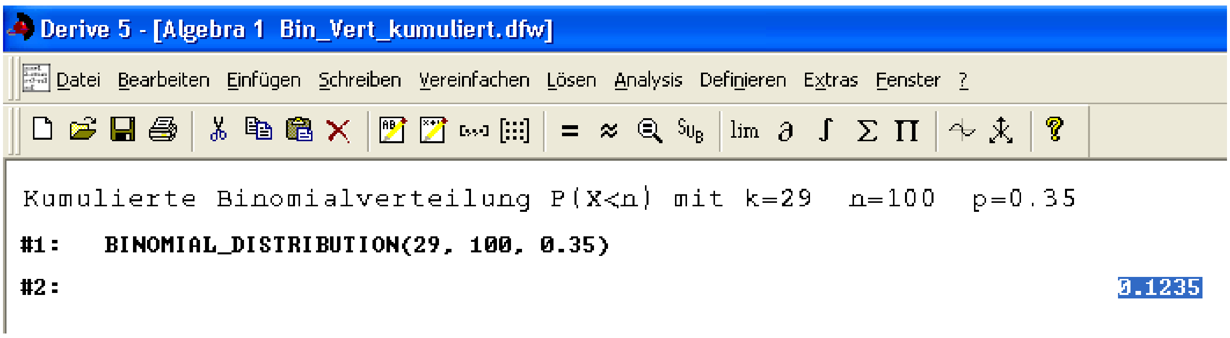
Erfolg: „kommt nicht durch“ : n=100 p=0,35

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}\le 29)=\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0)+\ldots+\mathrm{P}(\mathrm{Y}=29)$$

Das Ausrechnen auf dem Taschenrechner ist sehr Mühsam.
Wir verwenden die Tabelle mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}\le 29)\approx 0,124$$

oder DERIVE: $\mathrm{P}(\mathrm{Y}\le 29)\approx 0,1235$



Aufgabe 7.1: Siehe obiges Beispiel mit der Landtagswahl.
Berechne die Varianz und Standardabweichung für die Stichprobe mit 1000 Wählern!

n=1000; p=0,25 X: Anz. der Wähler, die Partei A wählen ➔ E(X)=np=250
V(x)=npq=250*0,75=187,5 $\sigma = \sqrt{npq} \approx 13{,}7$

Aufgabe 7.2: Ein korrekter Würfel wird 30 mal geworfen.

(a) Wie oft etwa wird die „6“ erscheinen?
n=30 p=1/6 E(X)=np=5

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die „6“ genau 5 mal erscheinen?

$$P(X=5)=\binom{30}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{25}\approx 19{,}2\%$$

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die „6“ zwischen 4 und 6 mal erscheinen?

$$P(4\le X\le 6)=P(X\le 6)-P(X\le 3)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$

$$=\binom{30}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{26}+\binom{30}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{25}+\binom{30}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{24}$$

$$\approx 18{,}5\%+19{,}2\%+16\%\approx 53{,}7\%$$

(d) Jemand behauptet: „Wenn man 30 mal (mit dem korrekten Würfel) würfelt, erhält man zwischen 3 und 7 mal die Sechs.“
In wie viel Prozent aller Fälle stimmt diese Behauptung?
Falls „zwischen“ die 3 und die 7 beinhaltet:

$$P(3\le X\le 7)=P(X\le 7)-P(X\le 2)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$$

$$\approx 78{,}4\%$$

Aufgabe 7.3: Schätze, wie oft man beim 300fachen Münzwurf (mit einer idealen Münze) Wappen haben wird.

n=300 p=0,5 E(X)=np=150

Gib Bereiche an, in denen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% (90%; 99%) das Ergebnis liegen wird!

V(x)=npq=150*0,5=75 $\sigma=\sqrt{npq}\approx 8{,}66$ $1{,}68\sigma\approx 14{,}5$ $1{,}96\sigma\approx 16{,}97$ $2{,}56\sigma\approx 22{,}2$

$U_{95\%}=[134;166]$ $U_{90\%}=[136;164]$ $U_{99\%}=[128;172]$

Aufgabe 7.4: In 30% aller 4-Personen-Arbeitnehmer-Haushalte gibt es eine Geschirrspülmaschine.
Eine Stichprobe vom Umfang 720 wird durchgeführt. In wie vielen dieser Haushalte wird man bei einem Signifikanzniveau von 95% eine Geschirrspülmaschine vorfinden?

n=720 p=0,3 E(X)=np=216

V(x)=npq=216*0,7=151,2 $\sigma = \sqrt{npq} \approx 12{,}3$ $1{,}96\sigma \approx 24{,}1$

$U_{95\%} = [192;240]$

Aufgabe 7.5: Beim Lottospiel „6 aus 49“ werden in einer Woche ca 75 Millionen Tips abgegeben. Die Wahrscheinlichkeit für „5 Richtige ohne Zusatzzahl“ beträgt 258 / 13 983 816, die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ ist 1 / 13 983 816.
Wie viel Gewinner

(a) mit „5 ohne Zusatzzahl“

n=75000000 p=258 / 13 983 816 q=13983558/13 983 816

E(X)=77000000*258 / 13 983 816 =1421 $\sigma = \sqrt{npq} \approx 37{,}7$ $1{,}96\sigma \approx 73{,}9$

$U_{95\%} = [1348;1494]$

(b) mit „6 Richtigen“

n=75000000 p=1 / 13 983 816 q=13983815/13 983 816 ≈ 1

E(X)=77000000*1 / 13 983 816 =5,5 $\sigma = \sqrt{npq} \approx 2{,}3$

Hier versagt die Laplace-Regel.

Mit EXCEL :

2				
3		n=	p=	
4		70000000	0,000000072	
5	k			
6	0	0,00647375		
7	1	0,03262769		
8	2	0,08222178		
9	3	0,13813259		
10	4	0,17404707		Summe
11	5	0,17543945		0,96
12	6	0,14736914		
13	7	0,10610578		
14	8	0,06684664		
15	9	0,03743412		
16	10	0,01886679		

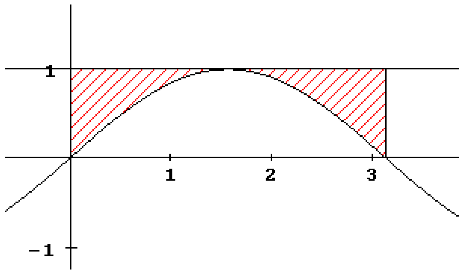
werden dabeisein? Gib eine Punktschätzung und eine Intervallschätzung auf dem Signifikanzniveau von 95% ab — sofern möglich!!!

Aufgabe 7.6: Einem Kreis mit Radius 1m ist ein Quadrat unbeschrieben. Nun fallen nach einem Zufallsverfahren 5000 „punktförmige Regentropfen“ in das Quadrat. Mit wie viel Treffern in den Kreis hat man zu rechnen? Punkt- und Intervallschätzung bei einem Signifikanzniveau von 95%!

n=5000 p=0,3 $p = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ E(X)=np=3927 $\sigma = \sqrt{npq} \approx 29{,}05$ $1{,}96\sigma \approx 56{,}9$

Aufgabe 7.7: Nach einem Zufallsverfahren werden zwei Zahlen x mit $0 \le x \le \pi$ und y mit $0 \le y \le 1$ bestimmt. Das Zahlenpaar (x | y) gilt als „Treffer“, wenn $y \ge \sin(x)$ ist.

(a) Skizziere den Sachverhalt!



(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer!

$$p = \frac{\pi - \int_0^{\pi} \sin x dx}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi} \approx 0{,}363$$

(c) Wie viel Treffer sind bei 5 000 Zahlenpaaren zu erwarten? (Punktschätzung!)

n=5000 p=0,363 E(X)=np=1817

(d) In einem Experiment erwiesen sich von den 5 000 Zufallspaaren 1 848 als Treffer. Ist dieses Ergebnis mit einem Signifikanzniveau von 95% verträglich mit der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeit?

$\sigma = \sqrt{npq} \approx 34{,}02$ $1{,}96\sigma \approx 66{,}7$

$U_{95\%} = [1751;1883]$

ist verträglich !