Kapitel IV

Ergebnis — Ereignis

Doppelwurf mit idealen Würfeln. Beobachtet wird, ob die Augensumme eine Primzahl ist. (Die Reihenfolge interessiert uns nicht.)

Hier gibt es mehrere passende Ergebnisse: zwei Einsen
eine Eins, eine Zwei
eine Eins, eine Vier
eine Eins, eine Sechs
....

Aufgabe 4.1: Vervollständige diese Liste!

(a) Wie viel Elemente enthält sie?
(b) Wie viel Elemente hat S?
(c) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse?
(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, als Augensumme eine Primzahl zu erhalten?

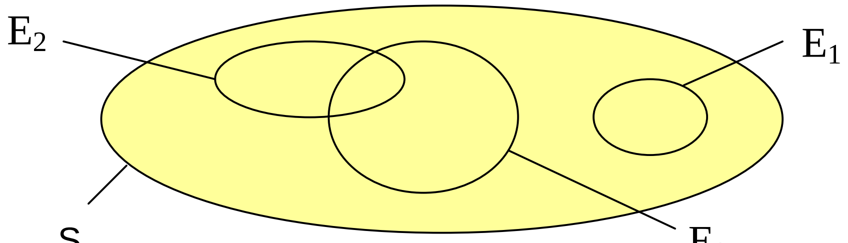
Hier taucht eine gänzlich neue Fragestellung auf:
die Wahrscheinlichkeit für eine **Gesamtheit** von Ergebnissen
(Bisher haben wir nur die Wahrscheinlichkeit von *einzelnen Ergebnissen* betrachtet!)

In Aufgabe 4.1 (d) hast du sicher die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten berechnet. Das lag auf der Hand, das ist absolut korrekt, und dies gibt Anlass zur Einführung eines neuen Begriffs und zu einer plausiblen Festlegung:

S ist eine *Menge von Ergebnissen*, die Gesamtheit der fraglichen Ergebnisse ist eine Teilmenge von S. Wir werden diese Teilmenge künftig ein **Ereignis** nennen, ganz im Sinne der Feststellung: „Beim Werfen der beiden Würfel ist folgendes Ereignis eingetreten: Augensumme gleich Primzahl.“

Definition:
Jede Teilmenge E der Ergebnismenge S heißt ein **Ereignis**.

Dies soll auch im Falle unendlich großer Ergebnismengen gelten!



Wenn nach der Durchführung eines Zufallsversuchs eines der Ergebnisse von E eingetreten ist, sagt man: **Das Ereignis E ist eingetreten**.

Wie viele Teilmengen hat eine Menge $S=\{e_1;e_2;...;e_n\}$ mit n Elementen ?

Die leere Menge ist per Definition Teilmenge jeder Menge

$\{\ \} \subset S$ S enthält $\binom{n}{0}=1$ nullelementige Teilmenge, **das unmögliche Ereignis**.

S enthält $\binom{n}{1}=n$ einelementige Teilmengen, die sogenannten **Elementarereignisse**

$$\{e_1\} \subset S\ ;\ \{e_2\} \subset S\ ;.......;\{e_n\} \subset S$$

S enthält $\binom{n}{2}$ zweielementige Teilmengen.

$$\{e_1;e_2\} \subset S\ ,..........,\{e_{n-1};e_n\} \subset S$$

S enthält $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen.

$$\{e_1;e_2;.....;e_k\} \subset S\ ,..........,\{e_{n-k+1};e_{n-k+2}.....;e_n\} \subset S$$

.
.
.

S enthält $\binom{n}{n}=1$ n-elementige Teilmenge, nämlich sich selbst.
Man sagt auch, S hat sich selbst als (unechte) Teilmenge. Diese Teilmenge heißt **das sichere Ereignis.**

Es gibt also insgesamt $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.......+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$ Teilmengen und damit auch 2^n verschiedene Ereignisse einer n-elementigen Ergebnismenge.
(vgl. Seite 9 : Binomialkoeffizienten)

Satz: Eine Menge mit n Elementen besitzt genau 2^n Teilmengen

Jedes Ereignis hat, wie wir gesehen haben, eine bestimmte Wahrscheinlichkeit.

Und nun die plausible **Festlegung**:

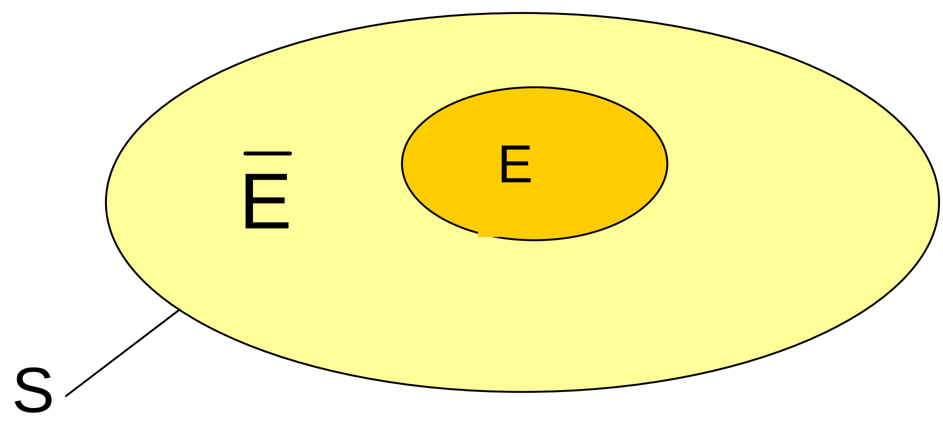
Falls $S=\{e_1;e_2;...;e_n\}$ die (endliche!) Ergebnismenge eines Zufallsversuchs ist und $E=\{e_i;e_k;...;e_r\}$ ein Ereignis, so ist $P(E)=P(e_i)+P(e_k)+...+P(e_r)$ die **Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses**.

Einige weitere Begriffe und Folgerungen:

(a) Wenn E = S , dann gilt : P(E) = 1
(b) Wenn E = { }, dann gilt P(E) = 0.
(c) Bei einem Laplace-Versuch (mit endlichem S) ist

$$P(E)=\frac{\text{Anzahl der zu E gehörenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}=\frac{\text{Anzahl der Elemente von E}}{\text{Anzahl der Elemente von S}}$$

(d) Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ eines Ereignisses E ist gleich dem Komplement von E bzgl. S. Es gilt: $P(\overline{E})=1-P(E)$.
In manchen Fällen ist P(E) auf direktem Weg nur schwer berechenbar, dafür lässt sich jedoch P(E) über $P(\overline{E})$ sehr einfach bestimmen.



Aufgabe 4.2: Formuliere die Gegenereignisse von E:

(a) Zufallsversuch: 5 mal nacheinander würfeln, die Augenzahlen der Reihe nach aufschreiben.
E: „Es kommt keine 6 vor."

(b) Zufallsversuch: 30 zufällig vorbeikommende Passanten nach ihrem Geburtstag fragen.
Ergebnisse: die 30-tupel der Geburtstage
E: „Alle haben an verschiedenen Tagen Geburtstag"

Aufgabe 4.3: Aus einer Urne mit 50 gleichartigen Kugeln wird nach einem Zufallsverfahren eine gezogen. Die Kugeln tragen die Nummern 1, 2, ... , 50.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E:
„Die Nummer auf der gezogenen Kugel ist eine Primzahl."

Aufgabe 4.4: Für einen gezinkten Würfel hat man (durch eine umfangreiche Versuchsserie) die folgenden Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten ermittelt:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0,21	0,15	0,13	0,20	0,19	0,12

Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ereignis E: „Augenzahl gerade" ein? Schreibe E auch als Menge!

Aufgabe 4.5: Der gezinkte Würfel aus Aufgabe 4.4 wird 5 mal nacheinander geworfen, die Augenzahlen werden der Reihe nach notiert. Die Ergebnisse dieses Zufallsversuchs sind also 5-tupel der natürlichen Zahlen von 1 bis 6.

(a) Wie viel Ergebnisse gehören zu dem Ereignis E: „Es kommt keine 6 vor"?
(b) Wie wahrscheinlich ist das Ereignis E?

Kapitel V

Die Monte-Carlo-Methode

Die Monte-Carlo-Methode verwendet Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, um komplexe Probleme (näherungsweise) zu lösen. Sie wird deshalb auch als Methode der statistischen Versuche bezeichnet.

Monte Carlo mit seinem Spielcasino gab den Name für diese Art von Verfahren. Im Spielcasino von Monte Carlo wurden durch Analyse der Roulette-Ergebnisse Tabellen mit Zufallszahlen erzeugt..

Monte-Carlo-Methoden beinhalten drei wesentliche Stufen:

1.) Für das zu lösende Problem muss ein **stochastisches Modell** (Zufallsversuch) gefunden werden, welches das Problem hinreichen gut genug beschreibt.

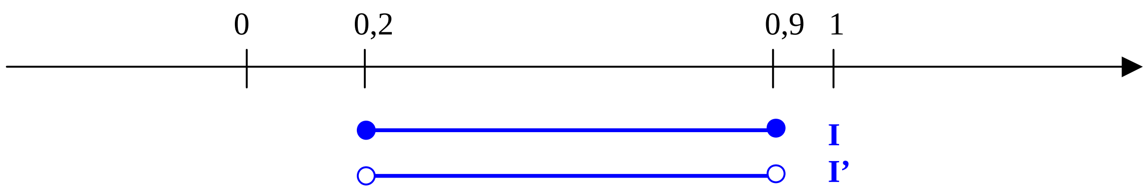
2.) Für die Durchführung des Zufallsversuchs sind **Zufallszahlen** notwendig.
Die Erzeugung von Zufallszahlen ist keineswegs trivial, sondern ein sehr schwieriges technisches Problem. Unser Taschenrechner, EXCEL und das Programm DERIVE erzeugen hinreichend brauchbare Zufallszahlen.

3.) Aus dem Ergebnis des Zufallsversuchs müssen wir dann **Schätzwerte** für das zu lösende Problem entwickeln.

Beispiel: Wie lässt sich ein Näherungswert für die Zahl π bestimmen?

Dazu müssen wir ein wenig ausholen.

Zufallsversuch 1: Auf der Zahlengeraden markieren wir das Intervall [0 ; 1].
Darin liegen das abgeschlossene Teilintervall I = [0,2 ; 0,9] und das offene Teilintervall I' =]0,2 ; 0,9[.



Nun stellen wir uns vor, dass jemand mit einem Bleistift mit „unendlich dünner Spitze“ nach einem Zufallsverfahren einen Punkt in dem großen Intervall antippt.
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Zahl 0,3 erwischt?
(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Zahl in I erwischt?
(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Zahl in I' erwischt?

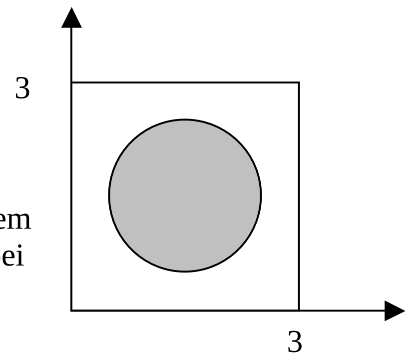
Lösung: • Zunächst nehmen wir stillschweigend an, dass durch das Zufallsverfahren nicht irgend eine „Gegend“ bevorzugt wird. Z.B. wird der Bleistift nicht mit größerer Wahrscheinlichkeit bei größeren als bei kleineren Zahlen landen.

- Hier haben wir es mit einer unendlichen Ergebnismenge zu tun: S = $\mathbb{R}$. Eine neue Situation!
- In unserer Terminologie ist 0,3 ein <u>Ergebnis</u> von S, I und I’ sind <u>Ereignisse</u>, nämlich Teilmengen von S.

Zu (a) Offensichtlich ist P(0,3) = 0. Das heißt zwar nicht, dass die 0,3 überhaupt nicht vorkommen *kann*, jedoch hat jede der unendlich vielen Zahlen in I die gleiche Chance, und die 0,3 wird daher „so gut wie nie“ angetippt werden.
Zu (b) Auch hier hilft der „gesunde Menschenverstand“ weiter und sagt uns: P(I) = 0,7. Grund: I nimmt das 0,7-fache des Platzes von [0 ; 1] ein.
Zu (c) Aus (a) und (b) ergibt sich schlüssig: P(I’) = 0,7. Ob die beiden Zahlen am Anfang und am Ende dabei sind oder nicht, ist für die Wahrscheinlichkeit egal, davon wird die Suppe nicht fett.

Wer sagt denn, dass Mathematik immer abstrakt ist?

Die Bestimmung von π



Das stochastische Modell:
In einem Quadrat der Seitenlänge 3 m steckt ein Kreis mit Radius 1 m. Nun fallen „Regentropfen“ auf das Quadrat. Wir nehmen an, dass die Tropfen zunächst so „klein“ sind, dass sie jeweils nur einen *Punkt* in dem Quadrat treffen und des weiteren nach einem Zufallsverfahren fallen, bei dem analog zu oben keine „Gegend“ bevorzugt wird.

Zufallszahlen:
Mit einem Zufallsgenerator erzeugen wir Zufallszahlen $0 \le x \le 3$ und $0 \le y \le 3$.
Mit P(x|y) haben wir dann Zufallspunkte auf unserer quadratischen Fläche. Als Treffer bezeichnen wir einen Punkt der auf der Kreisfläche liegt.

Ein Schätzwert für π :

Zuerst einige Vorüberlegungen:
Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass
(a) ein bestimmter Punkt in dem Quadrat ,
(b) das Innere des Kreises
(c) die Kreisperipherie
getroffen wird?

Lösung: Zu (a) Die Wahrscheinlichkeit ist gleich 0. (Siehe oben!)
Zu (b) Sie ist gleich dem Verhältnis der Kreisfläche zur Quadratfläche.
$P(E)=\frac{\pi\cdot 1^2}{3^2}=\frac{\pi}{9}$, wenn E bedeutet:
„Kreisinneres wird getroffen“.
Dabei haben wir offengelassen, ob die Peripherie zum Inneren hinzugerechnet werden soll oder nicht, wie in (c) dargestellt werden wird:

Zu (c) Die Fläche der Kreisperipherie ist ja gleich 0, daher ist die Wahrscheinlichkeit folgerichtig auch gleich 0.

Aus b) ergibt sich dann folgender Schätzwert:
Für eine hinreichend große Zahl von Zufallspunkten ist die Wahrscheinlichkeit $P(E) \approx h_n(E)$ und damit $\pi \approx 9 \cdot h_n(E)$

Bemerkung: Wenn man diesen Zufallsversuch *sehr, sehr oft* durchführt und sorgfältig Buch führt, kann man die Zahl π bis auf ein paar Stellen genau erhalten. Sehr effektiv ist das Verfahren allerdings nicht! Und dann hat man noch das Problem abzuschätzen, wie groß die erhaltene Genauigkeit ist.

Eine schöne Simulation zeigt das Applet auf der Seite
http://www.medusesetlicornes.com/html_java/hasard.htm
Mit DERIVE kann man ebenfalls sehr schön simulieren :
Simulation_MonteCarlo.dfw

Bei Zufallsversuchen mit unendlichem Ergebnisraum ist bei einem Ereignis E die Tatsache „p(E) = 0“ nicht gleichbedeutend mit der Unmöglichkeit des Ereignisses! Dies gilt auch bei einzelnen Ergebnissen.

Für Freaks: Eine andere Zufallsmethode zur experimentellen Bestimmung von π ist das **Buffonsche Nadelproblem,** bei dem Stäbe oder Nadeln von bestimmter Länge auf einen gedielten Fußboden geworfen werden. Es lässt sich mit unseren Kenntnissen (Wahrscheinlichkeiten bei unendlichen Ergebnismengen, Integrale und ein wenig gesundem Menschenverstand) verstehen! Mal im Internet nachschauen z.B.
http://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html

Aufgabe 5.1: Der Zufallsversuch zur Bestimmung von π wird *5 mal nacheinander* durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

(a) dass jedesmal der Kreis (wir meinen damit: das *Kreisinnere*) getroffen wird,
(b) dass höchstens einmal der Kreis getroffen wird?

Aufgabe 5.2 Das nebenstehende Bild zeigt einen Ausschnitt des Funktionsgraphen der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}25 \cdot (\sin(x))^2}}$ im Intervall [0;2]. Die Bestimmung einer Stammfunktion zu f ist nicht möglich.
Wie lässt sich der markierte Flächeninhalt mit der Monte-Carlo-Methode bestimmen?

Kapitel VI

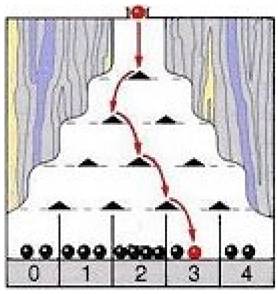
Bernoulli-Versuche, Bernoulli-Ketten

Beim (einmaligen) Werfen einer Münze hat man bekanntlich nur zwei Ergebnisse:
W = Wappen und Z = Zahl. Dabei spielt es zunächst keine Rolle, ob die Münze „ideal“ ist oder nicht.

Aufgabe 6.1:
Nehmen wir die nicht-ideale Münze aus Kapitel III: P(W) = 0,4 und P(Z) = 0,6.
Sie wird 5 mal nacheinander geworfen, die Einzelergebnisse werden der Reihe nach notiert. Bei diesem 5-stufigen Zufallsversuch sind die Ergebnisse also 5-tupel der Art WWZZW, usw.

(a) Stelle (wenigstens ausschnittsweise) ein Baumdiagramm dar! Wie viele Pfade hat es? Wie viele Ergebnisse hat dieser 5-stufige Versuch?
(b) Wie viele Ergebnisse hätte der 8-stufige Versuch (d.h. bei 8-fachem Werfen)?
(c) Verallgemeinere auf einen n-stufigen Versuch, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 6.2: Das Galton-Brett



Eine Kugel fällt von oben auf eine Anordnung von „Nägeln“, bei denen sie jeweils nach links bzw. nach rechts abgelenkt werden kann. (P(l)=0,5 P(r)=0,5) Nach 4 „Stufen“ landet sie in einem der Auffangtöpfe T_0 ,…T_4

a) Wie viele Elemente hat die Ergebnismenge ? Schreibe einige Elemente auf!
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel den eingezeichneten Weg einschlägt ?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel in dem Topf T_3 landet ?

Wir kommen wieder auf den 5-stufigen Versuch aus 6.1) zurück.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis

(d) WWZZW
(e) ZWWZW
(f) ZZWWW?

Welche Erkenntnis hast du gewonnen?

(g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: „zwei mal Z und drei mal W“?

Schauen wir uns wieder den 8-stufigen Versuch an.

(h) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis ZWWWZWWW?
(i) Wie viel Ergebnisse hat das Ereignis E’: „zwei mal Z und 6 mal W“?
(j) Bestimme P(E’).

Wenn du diese Aufgabe gelöst hast – und gut auf „Ergebnis“ bzw. „Ereignis“ geachtet hast – hast du im Grunde den Inhalt dieses wichtigen Kapitels schon voll drauf! Es kommen nur noch ein paar Begriffe und verallgemeinernde Formeln:

Ein Zufallsversuch mit nur zwei möglichen Ergebnissen heißt **einstufiger Bernoulli-Versuch**.
Wir nennen künftig die Ergebnisse meistens E ($\triangleq$ Erfolg) und $\overline{E}$ ($\triangleq$ Misserfolg)

Bei der obigen Münze wären z.B. E = Z und $\overline{E}$ = W (oder andersherum).

Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg nennen wir künftig **p**,
die Wahrscheinlichkeit für Misserfolg **q=1 - p**

Bei der obigen Münze wäre dann p = 0,6 und q = 0,4 (bzw. andersherum).

Ein **n-stufiger Bernoulli-Versuch** oder eine **n-stufige Bernoulli-Kette** ist eine n-fache Folge einstufiger Bernoulli-Versuche mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Das **Ereignis „k mal Erfolg“** bezeichnen wir kurz mit **X=k**

X alleine ist der Name für die Zufallsvariable, und beschreibt die Anzahl der Erfolge bei einem n-stufiger Bernoulli-Versuch.

Wir betrachten einen n-stufigen Bernoulli-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und Misserfolgswahrscheinlichkeit q.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „k mal Erfolg“, also für X=k
Dies entspricht dem Aufgabenteil 6.1 (j).

Lösung: Dazu müssen wir zwei Dinge untersuchen:
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis (d.h. ein n-tupel, oder noch anders gesagt: für einen für Pfad) mit k mal E?
- Wie viel solcher Ergebnisse (d.h. n-tupel, d.h. Pfade) gibt es?

Wahrscheinlichkeit für <u>einen</u> Pfad mit k mal E:
Wenn es k Erfolge gibt, gibt es n-k Misserfolge. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Pfad gleich $p^k \cdot q^{n-k}$.

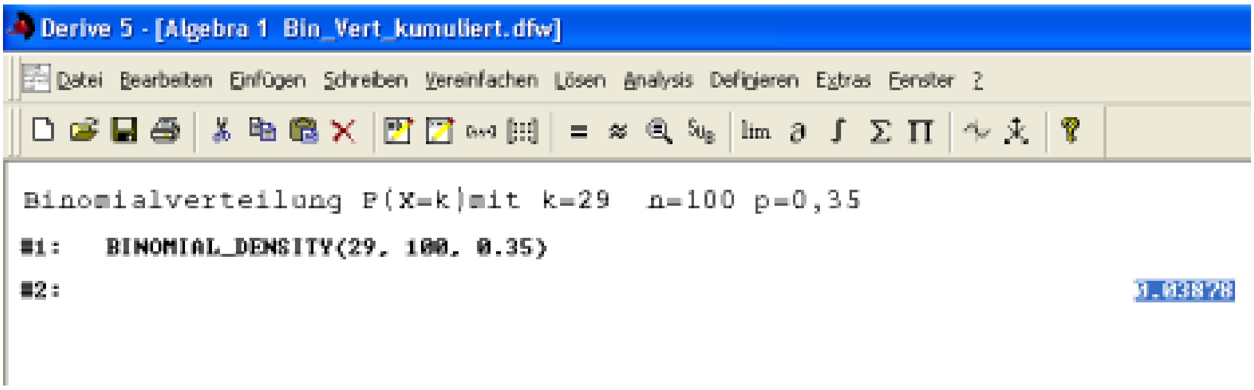
Anzahl solcher Pfade:
Bei einem derartigen n-tupel soll an genau k Stellen „E“ stehen. (An den anderen „M“)
Dies entspricht der Fragestellung: „Wie viel k-elementige Teilmengen hat eine n-elementige Menge?“ Die Antwort ist: $\binom{n}{k}$

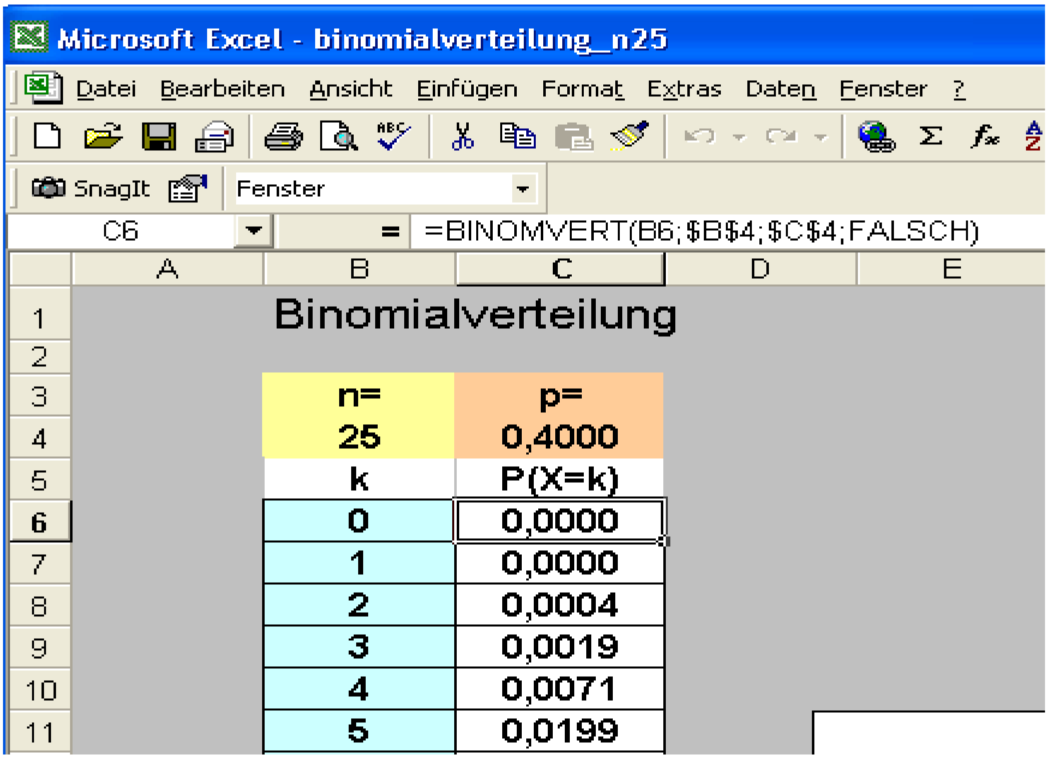
Daher ist die Wahrscheinlichkeit für: „k mal Erfolg“ gleich $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „k Erfolge bei einem n-stufigen Bernoulli-Versuch“ mit Erfolgswahrscheinlichkeit p (und q = 1 – p) ist:

$$P(X=k)=\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

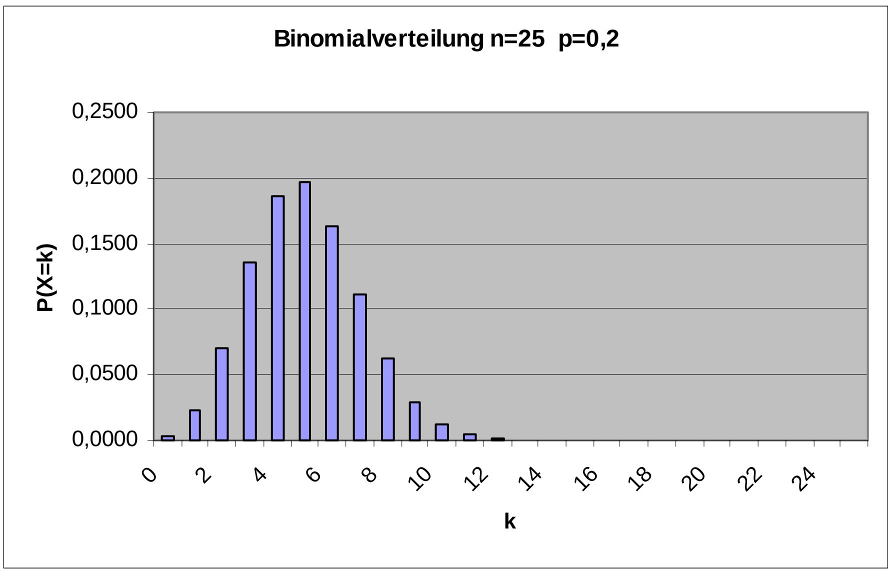
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P(X=k) für die Anzahl der Erfolge k, wobei k der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, ... , n annimmt, wird **<u>Binomialverteilung</u>** genannt. Man stellt sie anschaulich durch ein Histogramm dar.



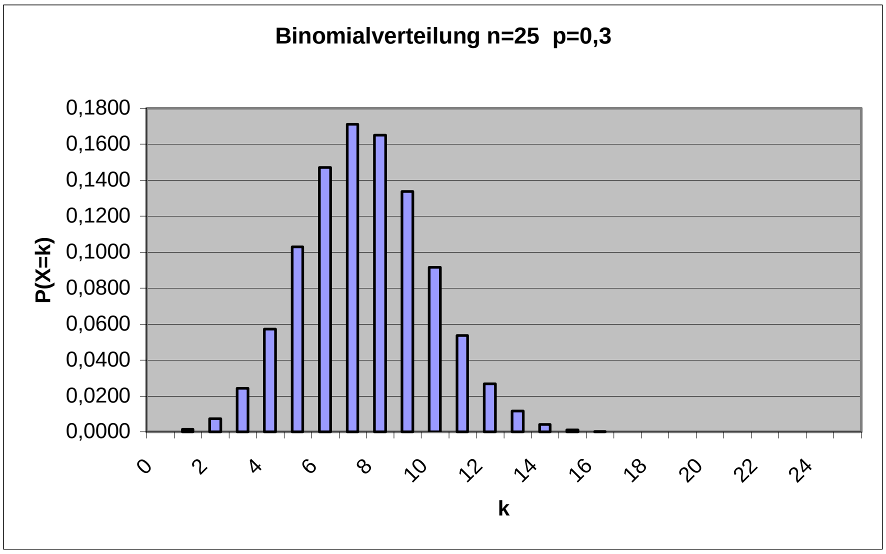


Mit EXCEL: BINOMVERT(k;n;p;kumuliert)
Setzt man für kumuliert TRUE, dann erhält man die kumulierte Verteilung

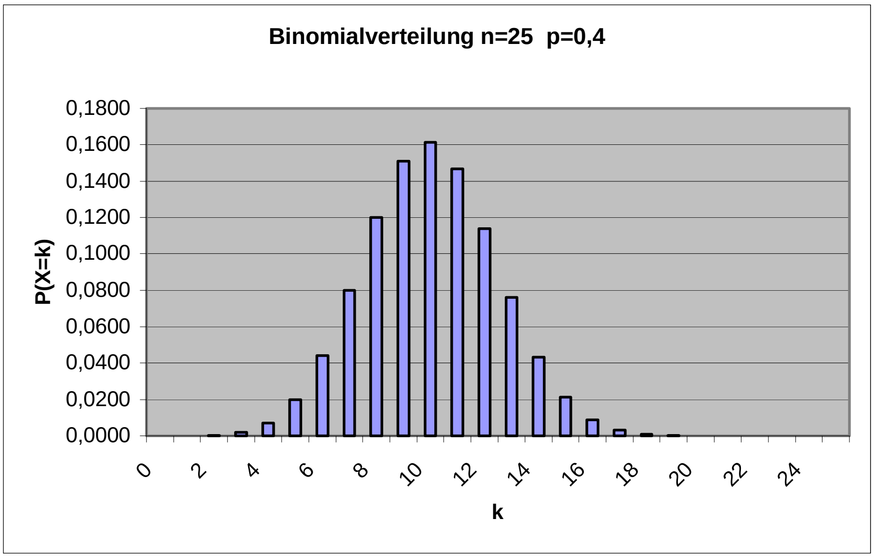
Beispiel: Histogramme von Binomialverteilungen für n=25 bei verschiedenem p:



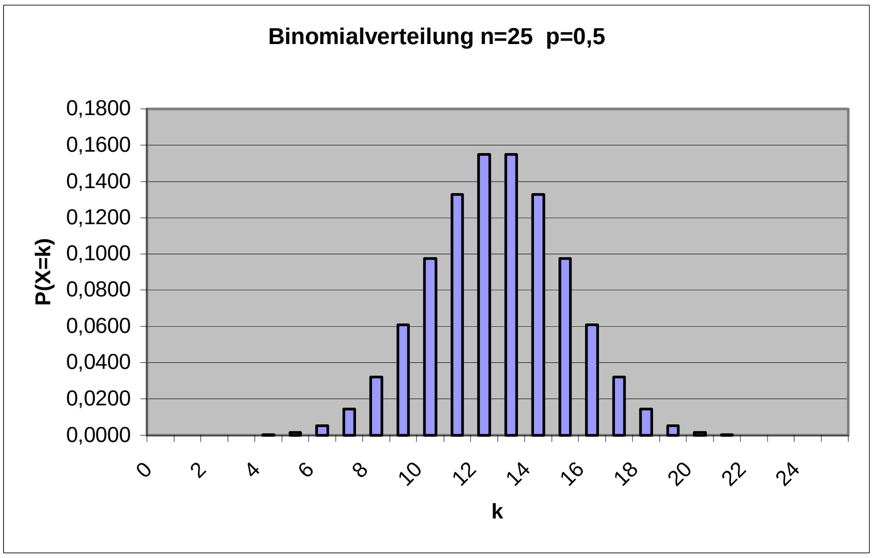
n=	p=
25	0,2000
0	0,0038
1	0,0236
2	0,0708
3	0,1358
4	0,1867
5	0,1960
6	0,1633
7	0,1109
8	0,0623
9	0,0294
10	0,0118
11	0,0040
12	0,0012
13	0,0003
14	0,0001
15	0,0000
16	0,0000
17	0,0000
18	0,0000
19	0,0000
20	0,0000
21	0,0000
22	0,0000
23	0,0000
24	0,0000
25	0,0000



n= 25	p= 0,3000
k	P(X=k)
0	0,0001
1	0,0014
2	0,0074
3	0,0243
4	0,0572
5	0,1030
6	0,1472
7	0,1712
8	0,1651
9	0,1336
10	0,0916
11	0,0536
12	0,0268
13	0,0115
14	0,0042
15	0,0013
16	0,0004
17	0,0001
18	0,0000
19	0,0000
20	0,0000
21	0,0000
22	0,0000
23	0,0000
24	0,0000
25	0,0000



n= 25	p= 0,4000
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0004
3	0,0019
4	0,0071
5	0,0199
6	0,0442
7	0,0800
8	0,1200
9	0,1511
10	0,1612
11	0,1465
12	0,1140
13	0,0760
14	0,0434
15	0,0212
16	0,0088
17	0,0031
18	0,0009
19	0,0002
20	0,0000
21	0,0000
22	0,0000
23	0,0000
24	0,0000
25	0,0000

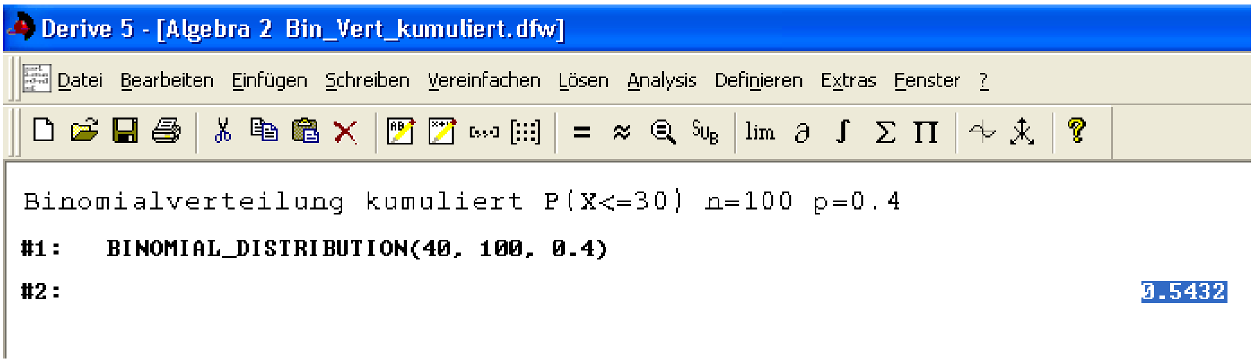


n= 25	p= 0,5000
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0001
4	0,0004
5	0,0016
6	0,0053
7	0,0143
8	0,0322
9	0,0609
10	0,0974
11	0,1328
12	0,1550
13	0,1550
14	0,1328
15	0,0974
16	0,0609
17	0,0322
18	0,0143
19	0,0053
20	0,0016
21	0,0004
22	0,0001
23	0,0000
24	0,0000
25	0,0000

Will man nicht die Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen X=0, X=1,….X=n berechnen, sondern die Summenwahrscheinlichkeiten, dann verwendet man Tabellen oder z.B. DERIVE bzw. EXCEL

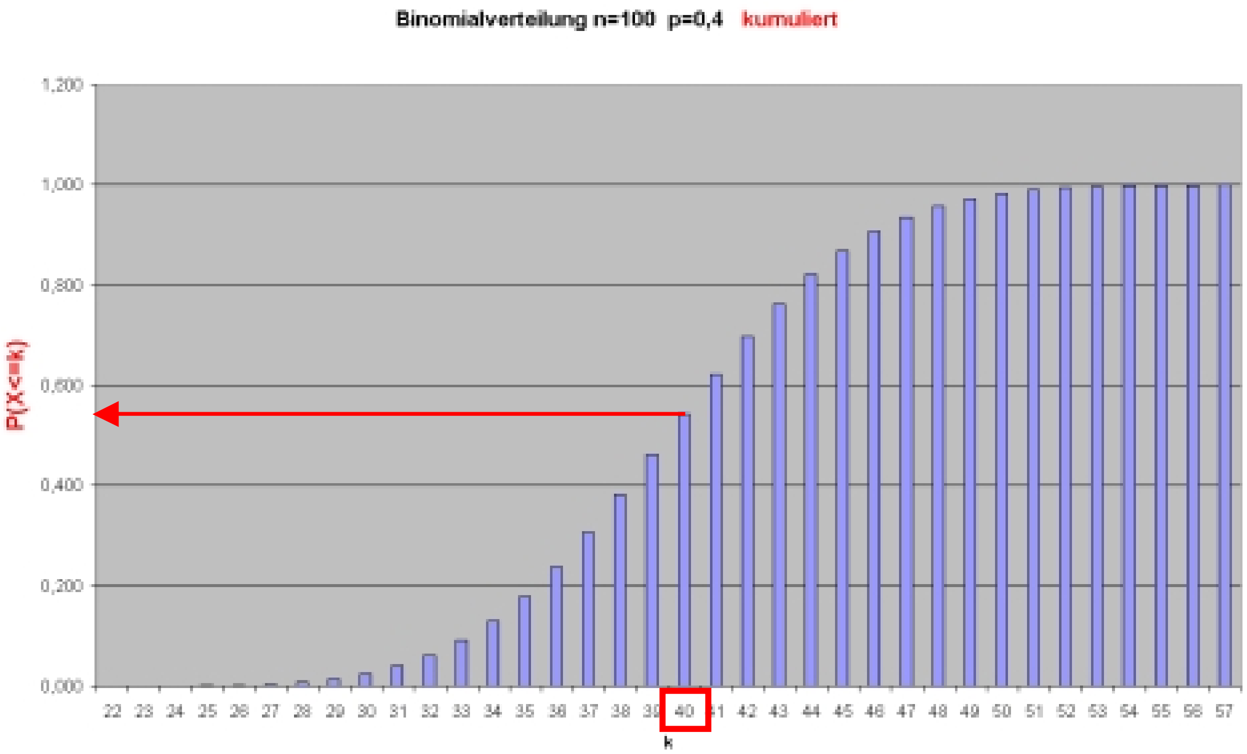
Bsp: n=100; Erfolgswahrscheinlichkeit p=0,4
Zufallsvariable X : „Anzahl der Erfolge“
Ereignis $X \leq 40$: „Die Anzahl der Erfolge ist kleiner oder gleich 40“

$P(X \leq 30) = P(X = 0) + \ldots + P(X = 40)$ mit dem TR sehr aufwändig.



Mit EXCEL: BINOMVERT(40;100;0,4;TRUE)

Diagramm der kumulierten Binomialverteilung :



$P(X \leq 30) = P(X = 0) + \ldots + P(X = 40) \approx 0{,}543$

oder mit einer Tabelle (Im Abitur steht euch eine solche Tabelle zur Verfügung !)

Binomialverteilungen		kumuliert			n=100	
p=	0,1	0,2	0,3	0,35	0,4	0,5
k<=						
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,024	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,058	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,117	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,206	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,321	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,451	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,583	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,703	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,802	0,025	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,876	0,047	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,927	0,080	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,960	0,129	0,000	0,000	0,000	0,000
16	0,979	0,192	0,001	0,000	0,000	0,000
17	0,990	0,271	0,002	0,000	0,000	0,000
18	0,995	0,362	0,005	0,000	0,000	0,000
19	0,998	0,460	0,009	0,000	0,000	0,000
20	0,999	0,559	0,016	0,001	0,000	0,000
21	1,000	0,654	0,029	0,002	0,000	0,000
22	1,000	0,739	0,048	0,003	0,000	0,000
23	1,000	0,811	0,076	0,007	0,000	0,000
24	1,000	0,869	0,114	0,012	0,001	0,000
25	1,000	0,913	0,163	0,021	0,001	0,000
26	1,000	0,944	0,224	0,035	0,002	0,000
27	1,000	0,966	0,296	0,056	0,005	0,000
28	1,000	0,980	0,377	0,085	0,008	0,000
29	1,000	0,989	0,462	0,124	0,015	0,000
30	1,000	0,994	0,549	0,173	0,025	0,000
31	1,000	0,997	0,633	0,233	0,040	0,000
32	1,000	0,998	0,711	0,303	0,062	0,000
33	1,000	0,999	0,779	0,380	0,091	0,000
34	1,000	1,000	0,837	0,462	0,130	0,001
35	1,000	1,000	0,884	0,546	0,179	0,002
36	1,000	1,000	0,920	0,627	0,239	0,003
37	1,000	1,000	0,947	0,702	0,307	0,006
38	1,000	1,000	0,966	0,770	0,382	0,010
39	1,000	1,000	0,979	0,828	0,462	0,018
40	1,000	1,000	0,988	0,875	0,543	0,028
41	1,000	1,000	0,993	0,912	0,623	0,044
42	1,000	1,000	0,996	0,941	0,697	0,067
43	1,000	1,000	0,998	0,961	0,763	0,097
44	1,000	1,000	0,999	0,975	0,821	0,136
45	1,000	1,000	0,999	0,985	0,869	0,184
46	1,000	1,000	1,000	0,991	0,907	0,242

47	1,000	1,000	1,000	0,995	0,936	0,309
48	1,000	1,000	1,000	0,997	0,958	0,382
49	1,000	1,000	1,000	0,999	0,973	0,460
50	1,000	1,000	1,000	0,999	0,983	0,540
51	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	0,618
52	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,691
53	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,758
54	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,816
55	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,864
56	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,903
57	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,933
58	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,956
59	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,972
60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,982
61	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990
62	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994
63	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997
64	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998
65	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
66	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
67	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
68	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
69	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
71	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
72	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
73	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
74	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
75	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
76	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
77	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
78	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
79	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
81	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
82	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
83	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
84	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
85	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
86	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
87	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
88	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
91	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
92	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
93	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
94	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
95	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
96	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
97	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
98	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
99	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
100	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Aufgabe 6.3: 75% der Bevölkerung sind einer bestimmten Meinung. 5 zufällig ausgewählte Personen werden befragt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe 0, 1, 2, 3, 4, 5 Personen diese Meinung vertreten, sofern sie ihre Meinung ehrlich sagen ?

Aufgabe 6.4: Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen bzw. Mädchens beträgt etwa 0,5.

(a) In einem Krankenhaus werden an einem Tag 12 Kinder geboren.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es 6 Jungen und 6 Mädchen sind?

(b) Bestimme die Verteilung der Geschlechter in allen Familien mit 4 Kindern!
D.h. wie viel Prozent aller Familien mit 4 Kindern haben keine Jungen / genau einen Jungen / ... / nur Jungen?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Familie mit 6 Kindern mehr Jungen als Mädchen?

Aufgabe 6.5: Nach Angaben der Telecom kommen nur 65% aller Telefongespräche beim ersten Wählen zustande.

Jemand will 5 Telefongespräche erledigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

(a) jedes mal direkt durchkommt,
(b) kein einziges mal direkt durchkommt,
(c) einmal nicht durchkommt?