Kapitel VII

Punkt- und Intervallschätzung bei Bernoulli-Versuchen

Einführungsbeispiel: Jemand wirft einen korrekten Würfel 60 mal. Wie oft etwa wird er die 6 würfeln?

Klar: etwa 10 mal, es kann aber auch mehr oder weniger sein. Das ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit P(6) = 1/6.
Dass er nur einmal oder gar überhaupt keine 6 würfelt, dass er vielleicht gar 40 mal die 6 bekommt, all das ist zwar nicht auszuschließen, aber äußerst unwahrscheinlich.

Ordnen wir die Sache ein: Ein Wurf mit einem Würfel ist ein Bernoulli-Versuch, falls wir als Ergebnisse nur 2 Möglichkeiten zulassen. Es bieten sich an: E = „6“, $\overline{E}$ = „nicht 6“.
Vorausgesetzt, der Würfel ist korrekt, dann ist p = 1/6 und q = 5/6.
Das 60-fache Werfen ist ein 60-stufiger Bernoulli-Versuch: n = 60.

In der Tat kann man davon ausgehen, dass die Anzahl der Sechsen bei diesem 60-fachen Würfeln eher bei 10 als bei irgend einer Zahl darunter oder darüber liegt! Das sagt nicht nur der vielzitierte „gesunde Menschenverstand“, das lässt sich auch verifizieren, wenn man dieses 60-stufige Experiment immer und immer wieder durchführt und Buch führt. (Siehe das Gesetz der „großen Zahl“!)

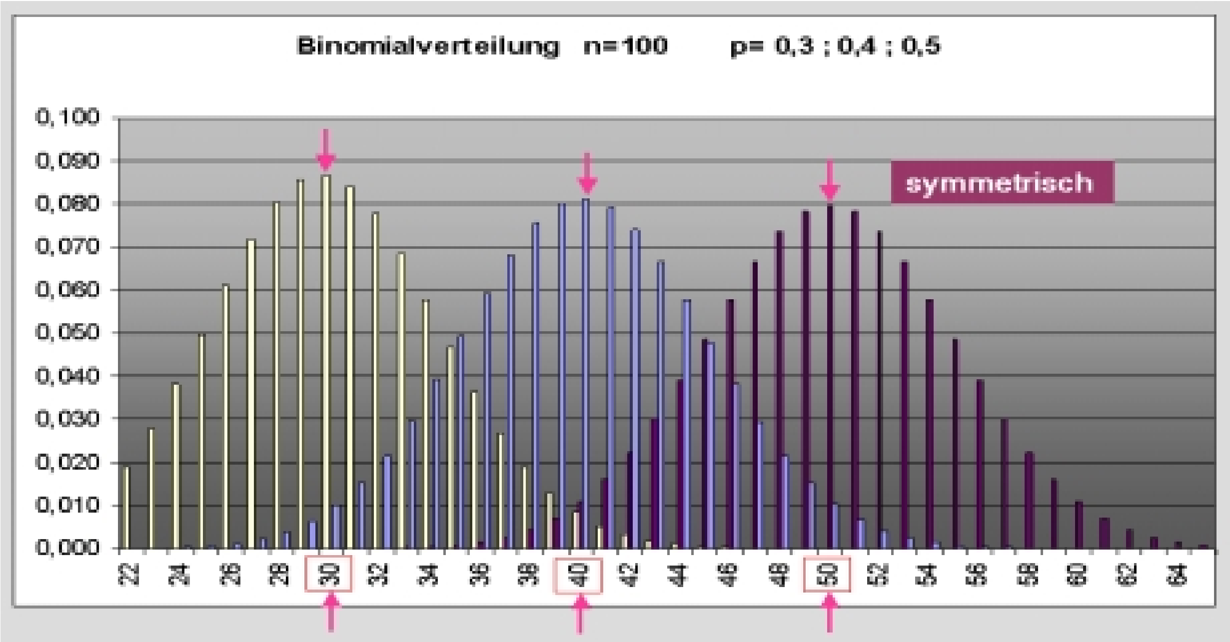
Die 10 ist der „Erwartungswert“ bei diesem 60-stufigen Bernoulli=Versuch.
Wir nennen sie μ. Berechnet haben wir den Erwartungswert durch $60 \cdot \frac{1}{6} = 10$

Schwieriger wird es, wenn man 100 mal würfelt. Es ist nämlich $100 \cdot \frac{1}{6} = 16\frac{4}{6} \approx 17$. Hier ist der Erwartungswert nicht ganzzahlig. Die wahrscheinlichste Anzahl ist die nächstliegende ganze Zahl, hier 17.

Bei einem n-stufigen Bernoulli-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ist der Erwartungswert (d.h. der Mittelwert der Anzahl der Erfolge)

$$\mu = n \cdot p$$

Das Maximum der Binomialverteilung liegt beim Erwartungswert oder in der Nähe davon.



Man spricht dabei auch von einer „**<u>Punktschätzung</u>**“ und ist sich der Tatsache bewusst, dass Abweichungen nach oben oder unten durchaus zu erwarten sind.

Beispiel 2: Bei einer Lndtagswahl bekommt Partei A 25% der Stimmen.

Zufallsversuch: Greife <u>einen</u> Wähler heraus und frage ihn, ob er Partei A gewählt hat oder nicht. (Andere Parteien zählen nicht. Es gibt also nur zwei mögliche Ergebnisse, wobei wir willkürlich E = „Parteipräferenz für A“ festlegen.) Es ist p = ¼

Stichprobe: Greife wahllos 1000 Wähler heraus und frage sie nach ihrem Wahlverhalten.

Dann haben <u>etwa</u> $1000 \cdot \frac{1}{4} = 250$ davon A gewählt. Es ist $\mu = 250$.

Kritik: Diese **<u>Punktschätzung</u>** ist natürlich nicht sehr aussagekräftig. Sinnvoller wäre eine Aussage der Art: „Mit allergrößter Wahrscheinlichkeit haben von diesen 1000 Leuten zwischen 215 und 285 Partei A gewählt.“ Dabei ist natürlich die Frage: Was heißt „allergrößte Wahrscheinlichkeit“? Kann man dies quantifizieren?
(Später werden wir zeigen, dass dies mit 99% Wahrscheinlichkeit gesagt werden kann!)
Es geht um eine „**<u>Intervallschätzung</u>**“.

Um diese Frage angehen zu können, müssen wir uns nochmals mit dem Thema „Streuung“ beschäftigen, das uns in der Beschreibenden Statistik begegnet ist. Schließlich ist die Binomialverteilung ja so etwas wie eine statistische Erhebung mit allem Drum und Dran wie Mittelwert, Streuung – und natürlich Maßen für die Streuung!
Wie in der Statistik gibt es eine Standardabweichung von dem Erwartungswert, die eine Aussage über die Streuung der Binomialverteilung um den Erwartungswert macht:

Zunächst die **Varianz**: $V = \sum_{k=0}^{n} (k-\mu)^2 \cdot P(X=k)$

Es gibt jedoch eine einfache Formel, die wir aber nicht beweisen: $V = n \cdot p \cdot q$

Daraus gewinnt man die **<u>Standardabweichung</u>**: $\sigma = \sqrt{V}$

Es gilt:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

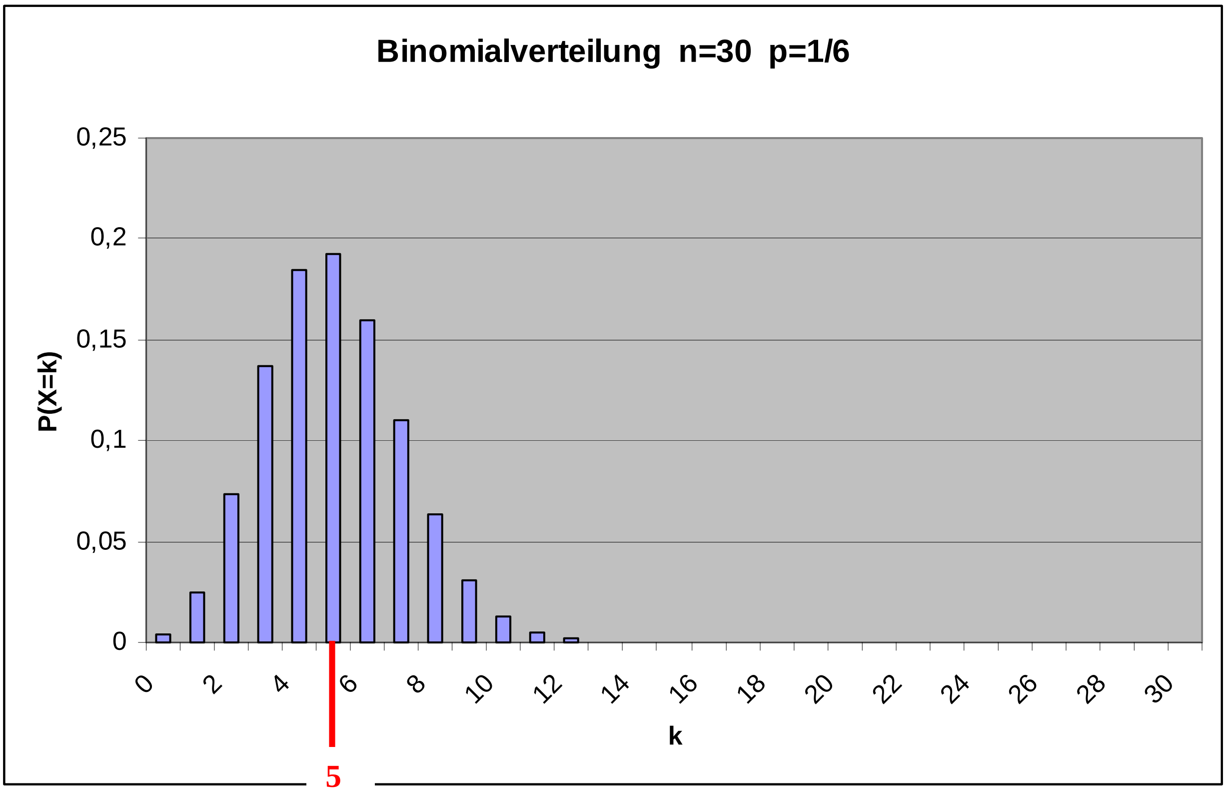
Aufgabe 7.1: Siehe obiges Beispiel mit der Landtagswahl.
Berechne die Varianz und Standardabweichung für die Stichprobe mit 1000 Wählern!

Aufgabe 7.2: Ein korrekter Würfel wird 30 mal geworfen.

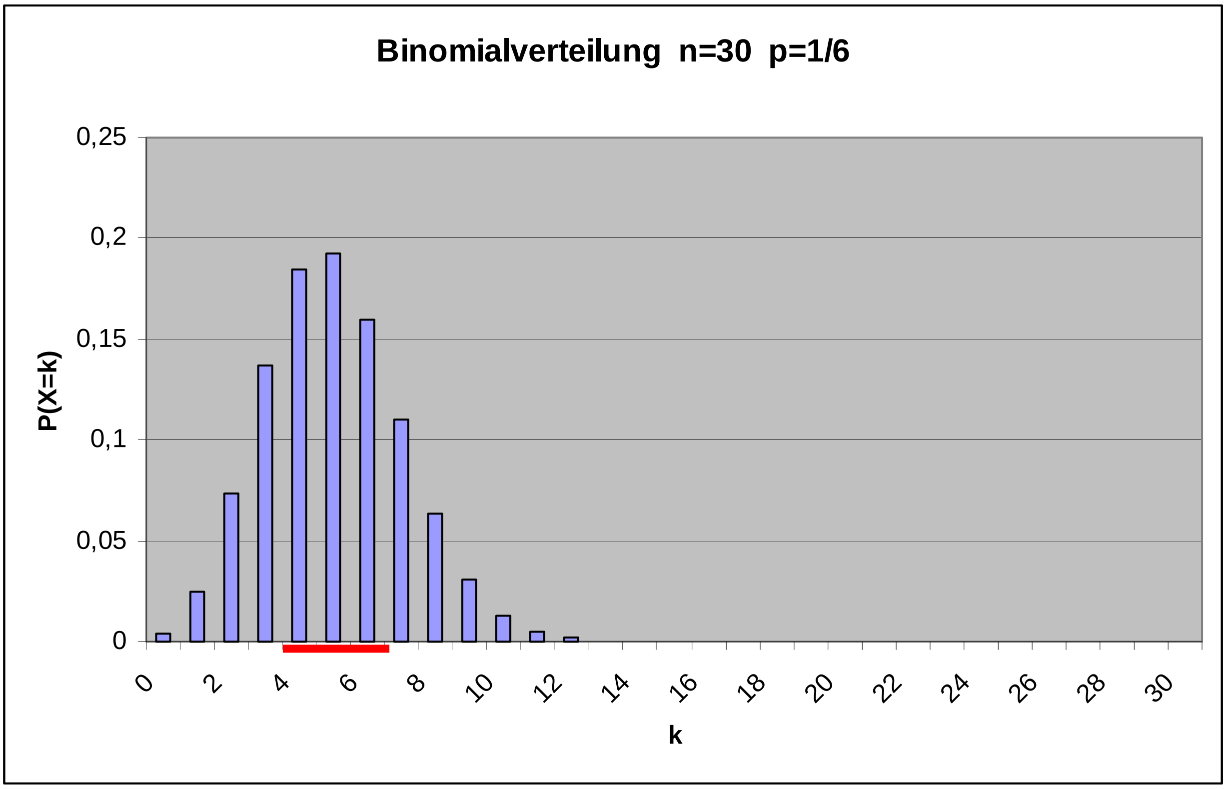
(a) Wie oft etwa wird die „6“ erscheinen?
(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die „6“ genau 5 mal erscheinen?
(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die „6“ zwischen 4 und 6 mal erscheinen?
(d) Jemand behauptet: „Wenn man 30 mal (mit dem korrekten Würfel) würfelt, erhält man zwischen 3 und 7 mal die Sechs.“
In wie viel Prozent aller Fälle stimmt diese Behauptung?

Wie du im Verlauf der Rechnung festgestellt hast, ist in der Binomialverteilung das über 5 liegende Rechteck das höchste, daran anschließend nach oben und unten folgen niedrigere Rechtecke!

Die Binomialverteilung dieses Problems hat dieses Aussehen:



Wahrscheinlichkeit einer Umgebung mit Radius r um den Erwartungswert μ
(k = Anzahl der „Erfolge“)



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der „Erfolge“ in dem Intervall $[\mu - r; \mu + r]$ liegt, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten P(X = k) für $k \in [\mu - r; \mu + r]$
Hier: P(X = 3) + P(X = 4) + ... + P(X = 7)

Frage: Wie groß muss man allgemein den Radius r des Intervalls um μ wählen, damit z.B. mit 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der „Erfolge“ in diesem Intervall liegt?

Im Prinzip ist diese Frage grundsätzlich rein rechnerisch lösbar:

- Man bestimmt den Erwartungswert μ
- Von hier aus bestimmt man – von dem zentralen Punkt aus nach links und rechts schreitend – die Wahrscheinlichkeiten der Nachbarwerte k so lange, bist die Summe der Wahrscheinlichkeiten 90% erreicht oder überschreitet.

Das kann lange dauern! Vor allem ist die Rechnung „zu Fuß“ bei großen n extrem mühsam.
Mit EXCEL dagegen ein Kinderspiel.

Zum Glück macht die Theorie eine sehr einfache Faustregel, die wir aber nicht beweisen, sondern „nur" anwenden werden. Sie greift auf die Standardabweichung zurück:

> Unter der Voraussetzung, dass bei einem n-stufigen Bernoulli-Versuch die **Laplace-Bedingung** $\sigma > 3$ (*) erfüllt ist, ist der Radius r
> der 90% - Umgebung um μ gerade r = 1,64 σ,
> der 95% - Umgebung um μ gerade r = 1,96 σ,
> der 99% - Umgebung um μ gerade r = 2,58 σ.

Wir fassen zusammen:

Bei einem n-stufigen Bernoulli-Versuch (Erfolgswahrscheinlichkeit p, Misserfolgswahrscheinlichkeit q =1-p) fragt man:

Wie oft ist auf diesen n Stufen ein Erfolg eingetreten?

Es gibt zwei Antworten:

(1) Eine **Punktschätzung:**
Die ungefähre Anzahl von Erfolgen ist gleich dem **Erwartungswert**

$$\mu = n \cdot p$$

(aber das weiß schon Lieschen Müller...)

(2) Eine **Intervallschätzung**:
Man kann um den Erwartungswert μ herum ein Intervall mit Radius r angeben, in dem „mit großer Wahrscheinlichkeit"die Anzahl der Erfolge liegen.

Man kann dann etwa sagen: „Mit 90% (bzw. 95%, bzw. 99%) Wahrscheinlichkeit gibt es zwischen ... und ... Erfolge"

- Bei 90% ist r = 1,64 σ,
- Bei 95% ist r = 1,96 σ,
- Bei 99% ist r = 2,58 σ.

Anwendung finden Intervallschätzungen vor allem bei Stichproben.

(*) Alternativ: $n \cdot p \cdot q > 9$

Vielen Leuten sind gefühlsmäßig die 95%-Umgebungen lieber (etwa gegenüber den 90%-Umgebungen). Daher gibt es eine darauf abgestellte Redewendung:

Liegt die Anzahl k der Erfolge einer n-elementigen Stichprobe innerhalb einer 95%-Umgebung von μ , so sagt man:

> Die Anzahl k **ist verträglich mit der Wahrscheinlichkeit p** (**bei einem Signifikanzniveau von 95%**)

Liegt die Anzahl k der Erfolge außerhalb der 95%-Umgebung, so spricht man von einer **signifikanten Abweichung**. (lat: insignis=ausgezeichnet)

EXCEL-TABELLE

Binomialverteilung	n=100								
p=	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
μ=	10	20	30	40	50	60	70	80	90
V(X)=	9	16	21	24	25	24	21	16	9
$\sigma = \sqrt{npq}$	3,00	4,00	4,58	4,90	5,00	4,90	4,58	4,00	3,00
$1{,}64 \cdot \sigma$	4,92	6,56	7,52	8,03	8,20	8,03	7,52	6,56	4,92
$1{,}96 \cdot \sigma$	5,88	7,84	8,98	9,60	9,80	9,60	8,98	7,84	5,88
$2{,}58 \cdot \sigma$	7,74	10,32	11,82	12,64	12,90	12,64	11,82	10,32	7,74
U[90%]	5	13	22	31	41	51	62	73	85
	14	26	37	48	58	68	77	86	94
	0,900	0,919	0,918	0,933	0,927	0,933	0,918	0,919	0,903
U[95%]	4	12	21	30	40	50	61	72	84
	15	27	38	49	59	69	78	87	95
	0,952	0,953	0,950	0,958	0,954	0,958	0,950	0,963	0,956
U[99%]	2	9	18	27	37	47	58	69	82
	17	30	41	52	62	72	81	90	97
	0,990	0,993	0,991	0,992	0,955	0,992	0,992	0,995	0,993

Aufgabe 7.3: Schätze, wie oft man beim 300fachen Münzwurf (mit einer idealen Münze) Wappen haben wird.
Gib Bereiche an, in denen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% (90%; 99%) das Ergebnis liegen wird!

Aufgabe 7.4: In 30% aller 4-Personen-Arbeitnehmer-Haushalte gibt es eine Geschirrspülmaschine.
Eine Stichprobe vom Umfang 720 wird durchgeführt. In wie viel dieser Haushalte wird man bei einem Signifikanzniveau von 95% eine Geschirrspülmaschine vorfinden?

Aufgabe 7.5: Beim Lottospiel „6 aus 49“ werden in einer Woche ca 75 Millionen Tips abgegeben. Die Wahrscheinlichkeit für „5 ohne Zusatzzahl“ beträgt 252 / 13 983 816, die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ ist 1 / 13 983 816.
Wie viel Gewinner
(a) mit „5 ohne Zusatzzahl“
(b) mit „6 Richtigen“
werden dabeisein? Gib eine Punktschätzung und eine Intervallschätzung auf dem Signifikanzniveau von 95% ab — sofern möglich!!!

Aufgabe 7.6: Einem Kreis mit Radius 1m ist ein Quadrat unbeschrieben. Nun fallen nach einem Zufallsverfahren 5000 „punktförmige Regentropfen“ in das Quadrat. Mit wie viel Treffern in den Kreis hat man zu rechnen? Punkt- und Intervallschätzung bei einem Signifikanzniveau von 95%!

Aufgabe 7.7: Nach einem Zufallsverfahren werden zwei Zahlen x mit $0 \le x \le \pi$ und y mit $0 \le y \le 1$ bestimmt. Das Zahlenpaar (x | y) gilt als „Treffer“, wenn $y \ge \sin(x)$ ist.
(a) Skizziere den Sachverhalt!
(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer!
(c) Wie viel Treffer sind bei 5 000 Zahlenpaaren zu erwarten? (Punktschätzung!)
(d) In einem Experiment erwiesen sich von den 5 000 Zufallspaaren 1 848 als Treffer. Ist dieses Ergebnis mit einem Signifikanzniveau von 95% verträglich mit der theoretisch berechneten Wahrscheinlichkeit?

Das nachfolgende Kapitel ist eine Powerpoint-Präsentation, die ihr euch auf der Seite www.wazimmer.de ansehen könnt. Hier findet ihr auch noch das gesamte Skript, die Lösung der Aufgaben und noch vieles mehr.

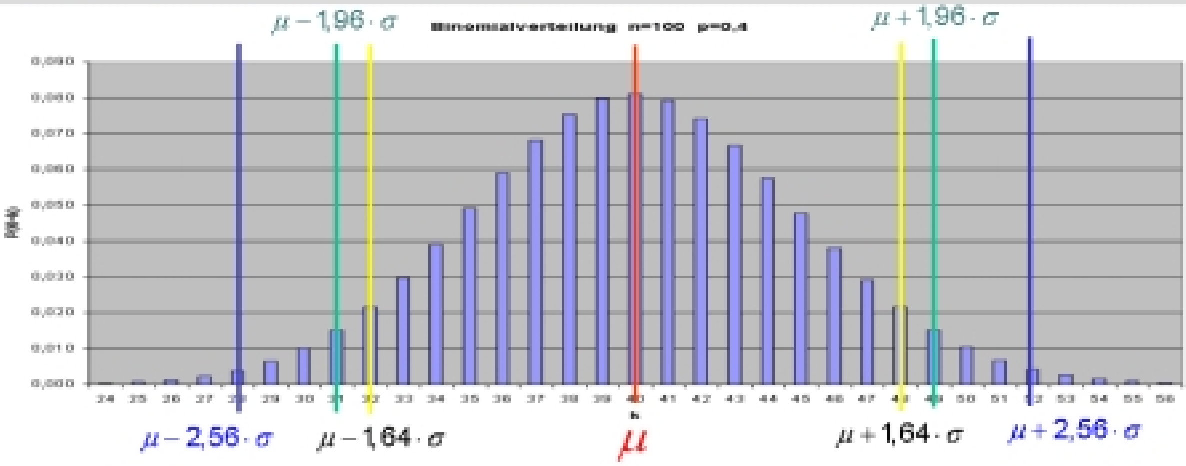
Kapitel VIII
Das Testen von Hypothesen

Faustregeln

Die folgenden Faustregeln für Binomialverteilungen gelten umso genauer, je größer n ist, insbesondere falls die Laplace-Bedingung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} > 3$ erfüllt ist.

Radius der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung		Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Radius der Umgebung
σ	68%		90%	$1,64 \cdot \sigma$
2σ	95,5%		95%	$1,96 \cdot \sigma$
3σ	99,7%		99%	$2,56 \cdot \sigma$

Beispiel für die Faustregeln



$n = 100 \quad p = 0,4 \quad \Rightarrow \quad \mu = np = 40$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot 0,6} \approx 4,9$

$1,64 \cdot \sigma \approx 8,03 \qquad 1,96 \cdot \sigma \approx 9,6 \qquad 2,56 \cdot \sigma \approx 12,54$

$U_{90\%} = [32;48] \qquad U_{95\%} = [31;49] \qquad U_{90\%} = [28;52]$

Casinowürfel und normaler Spielwürfel

Casinowürfel :
-nahezu exakte Würfelform,
-transparent,
-Augen aus einem Material gleicher Dichte eingelassen
-vom Casino signiert

Spielwürfel :
-Würfelform mit abgerundeten Kanten und Ecken,
-i.a. nicht transparent,
-i.a. Augen ausgefräst

Ist der Spielwürfel als hinreichend ideal anzusehen ?

Wir prüfen das Auftreten der 6 und stellen eine Hypothese auf :

H_0: Der Würfel ist ideal, d.h. $p_6 = \frac{1}{6}$

Nullhypothese

Wir würfeln 120 mal:

6	$\overline{6}$
25	95

Wir müssen eine Bedingung formulieren, wann wir die Hypothese annehmen bzw. wann wir sie verwerfen.

Entscheidungsregel

$\mu = np = 20$

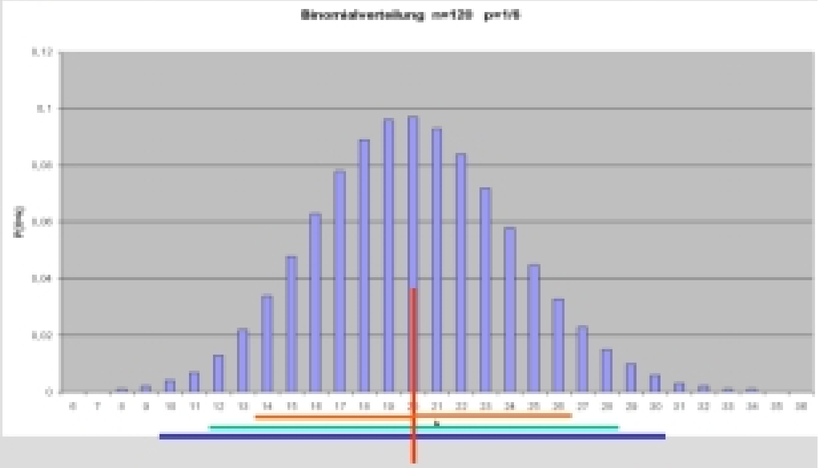
$\sigma = \sqrt{npq} =$

$\sqrt{20 \cdot \frac{5}{6}} \approx 4{,}08$

$1{,}64 \cdot \sigma \approx 6{,}7$

$1{,}96 \cdot \sigma \approx 8{,}002$

$2{,}56 \cdot \sigma \approx 10{,}45$



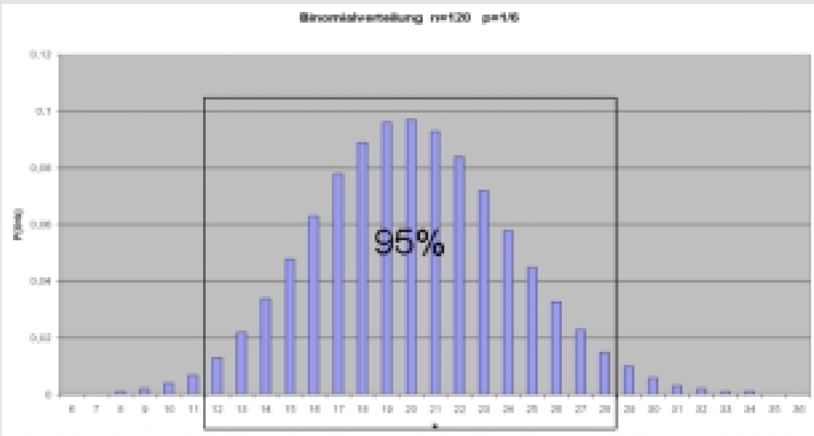
$U_{90\%} = [14;26]$ $U_{95\%} = [12;28]$ $U_{99\%} = [10;30]$

95%-Entscheidungsregel :

Ich verwerfe die Hypothese, wenn entweder k<12 oder k>28 ist.

Entscheidungsregel

$U_{95\%} = [12;28]$



Ergebnisse außerhalb der $U_{95\%}$ -Umgebungen heißen ungewöhnlich, die Abweichung wird als signifikant bezeichnet.

Das Ergebnis k=25 ist verträglich mit der Hypothese, also verwerfe ich diese nicht. Ich behalte sie bei.

Vorsicht! Eine Annahme, dass die Hypothese gültig ist, ist damit nicht möglich, weil dieses Ergebnis k=25 auch mit anderen Hypothesen verträglich ist.

z.B. $\tilde{H}$: Der Würfel ist nicht ideal. $p_6=0{,}18$

Entscheidungsregel

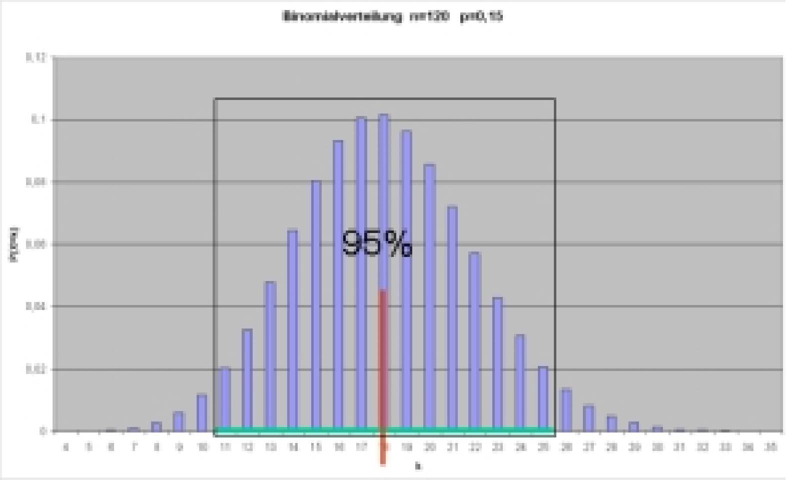
$\mu = np = 18$

$\sigma = \sqrt{npq} =$

$\sqrt{18 \cdot 0{,}85} \approx 3{,}92$

$1{,}96 \cdot \sigma \approx 7{,}67$

$U_{95\%} = [11;25]$



95%-Entscheidungsregel : Ich verwerfe die Hypothese $\tilde{H}$ wenn entweder k<11 oder k>26 ist

Das Ergebnis k=25 ist auch verträglich mit der Hypothese $\tilde{H}$, also verwerfe ich auch diese nicht.

Verwerfen einer Hypothese

Anderes Ergebnis für n=120 :

6	$\bar{6}$
30	90

H_0: Der Würfel ist ideal, d.h. $p_6 = \frac{1}{6}$

$U_{95\%} = [12;28]$

95%-Entscheidungsregel :

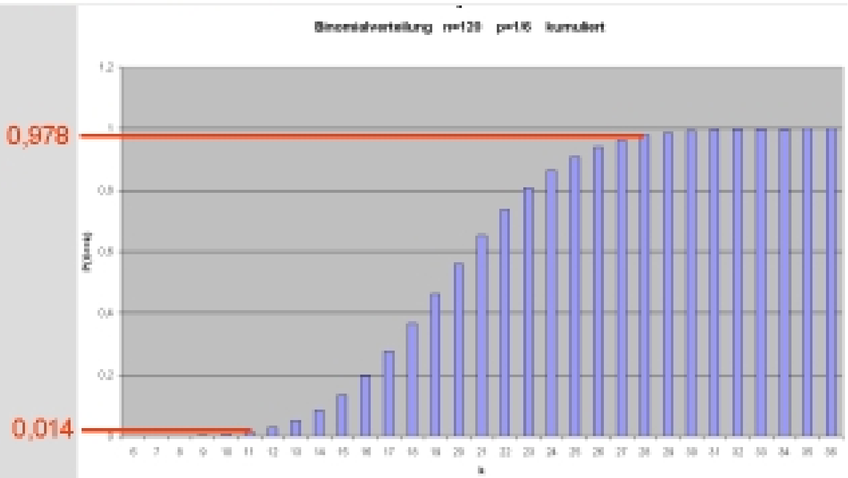
Ich verwerfe die Hypothese, wenn entweder k<12 oder k>28 ist.

k=30 $\Rightarrow$ Ich verwerfe die Hypothese H_0 .

Verwerfen einer Hypothese

$P(X > 28)$
$= 1 - P(X \leq 28)$
$\approx 1 - 0{,}978 \approx 0{,}022$

$P(X < 12)$
$= P(X \leq 11) \approx 0{,}014$



$P(X < 12 \text{oder } X > 28) = 0{,}036$

Ich verwerfe die Hypothese H_0 in 5% (genauer 3,6%) der Fälle zu unrecht, denn auch solche Ergebnisse treten bei einem idealen Würfel in ca. 5% der Fälle auf.
Fehler 1. Art.

Fehler 1. und 2. Art

Beim Testen der Hypothese H_0 : $p=p_0$ sind folgende Entscheidungen und Fehler möglich:

Test	Entscheidung	$p=p_0$	Bewertung
$k \notin U_{95\%}$	H_0 wird abgelehnt	wahr	Fehlentscheidung Fehler 1. Art
		falsch	richtige Entscheidung
$k \in U_{95\%}$	H_0 wird beibehalten	wahr	richtige Entscheidung
		falsch	Fehlentscheidung Fehler 2. Art

Aufgaben zu Kapitel 8:

Aufgabe 8.1

Ein elektronischer Würfel zeigt auf Tastendruck zufällig eine der Ziffern 1,2,3,4 an. **X** sei die Zufalls-variable „**Augenzahl beim einmaligen Würfeln**“ mit diesem Würfel. Die zugehörige Wahrschein-lichkeitsverteilung ist durch

k	1	2	3	4
P(X=k)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

gegeben.

Der Würfel wird 100 mal betätigt.

8.1.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dabei genau 33 mal die Ziffer 3 auf ?

8.1.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die Ziffer 3 mindestens 25 mal und höchstens 33 mal auf ?

Jetzt will man überprüfen, ob für diesen Würfel die Hypothese $p = \frac{1}{3}$ **für das Auftreten der Augenzahl 2 zutrifft.**
Dazu wird wieder 100 mal gewürfelt.

8.1.3 Wie lautet eine Entscheidungsregel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% ?
8.1.4 Beurteile das Ergebnis : Es tritt 36 mal die Ziffer 2 auf.
8.1.5 Wie wäre das Ergebnis „Die Ziffer 2 tritt 23 mal auf“ zu beurteilen ?