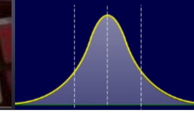
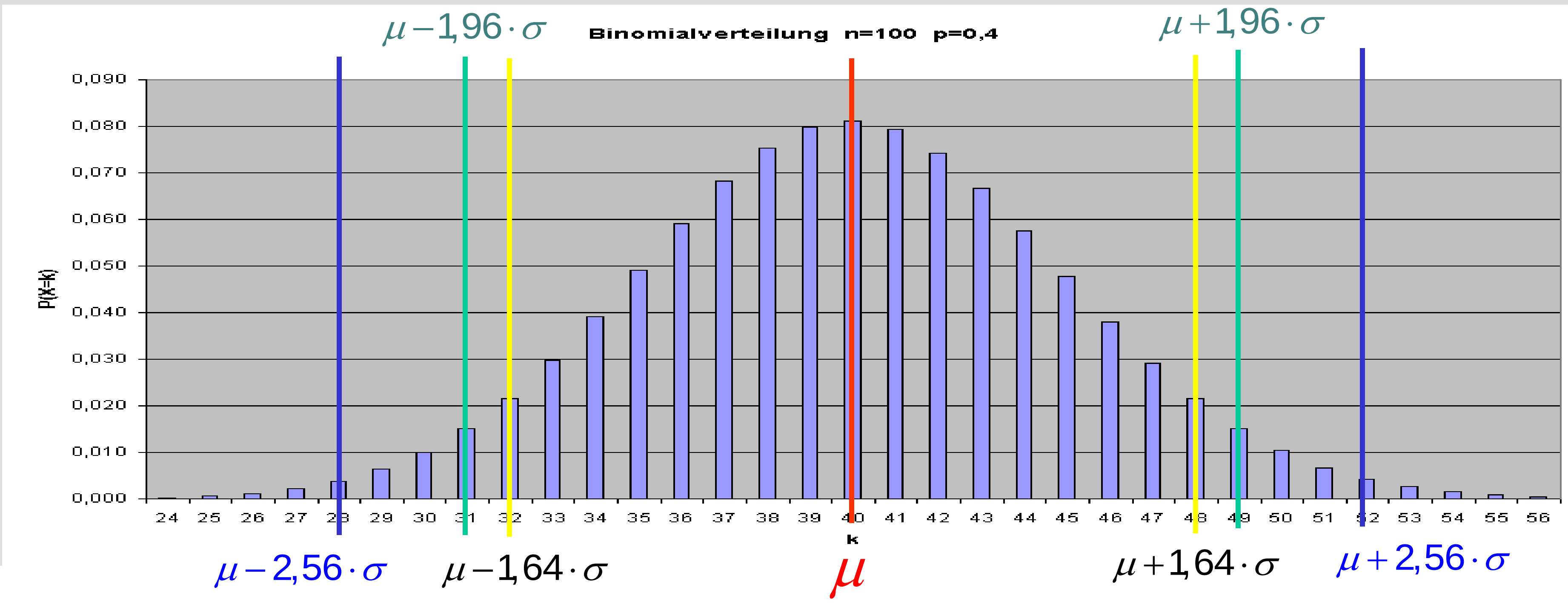


Faustregeln

Die folgenden **Faustregeln** für Binomialverteilungen gelten umso genauer, je größer n ist, insbesondere falls die Laplace-Bedingung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} > 3$ erfüllt ist.

Radius der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung		Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Radius der Umgebung
σ	68%		**90%**	$1{,}64 \cdot \sigma$
2σ	95,5%		**95%**	$1{,}96 \cdot \sigma$
3σ	99,7%		**99%**	$2{,}56 \cdot \sigma$

Beispiel für die Faustregeln



$$n = 100 \quad p = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \mu = np = 40$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot 0{,}6} \approx 4{,}9$$

$$1{,}64 \cdot \sigma \approx 8{,}03 \qquad 1{,}96 \cdot \sigma \approx 9{,}6 \qquad 2{,}56 \cdot \sigma \approx 12{,}54$$

$$U_{90\%} = [32;48] \qquad U_{95\%} = [31;49] \qquad U_{99\%} = [28;52]$$

Casinowürfel und normaler Spielwürfel

Casinowürfel :

-nahezu exakte Würfelform,

-transparent,

-Augen aus einem Material gleicher Dichte eingelassen

-vom Casino signiert

Spielwürfel :

-Würfelform mit abgerundeten Kanten und Ecken,

-i.a. nicht transparent,

-i.a. Augen ausgefräst

Ist der Spielwürfel als hinreichend ideal anzusehen ?

Wir prüfen das Auftreten der 6 und stellen eine Hypothese auf :

H_0: Der Würfel ist ideal, d.h. $p_6 = \frac{1}{6}$

Nullhypothese

Wir würfeln 120 mal:

6	$\overline{6}$
25	95

Wir müssen eine Bedingung formulieren, wann wir die Hypothese annehmen (besser: wann wir sie nicht verwerfen) bzw. wann wir sie verwerfen.

Entscheidungsregel

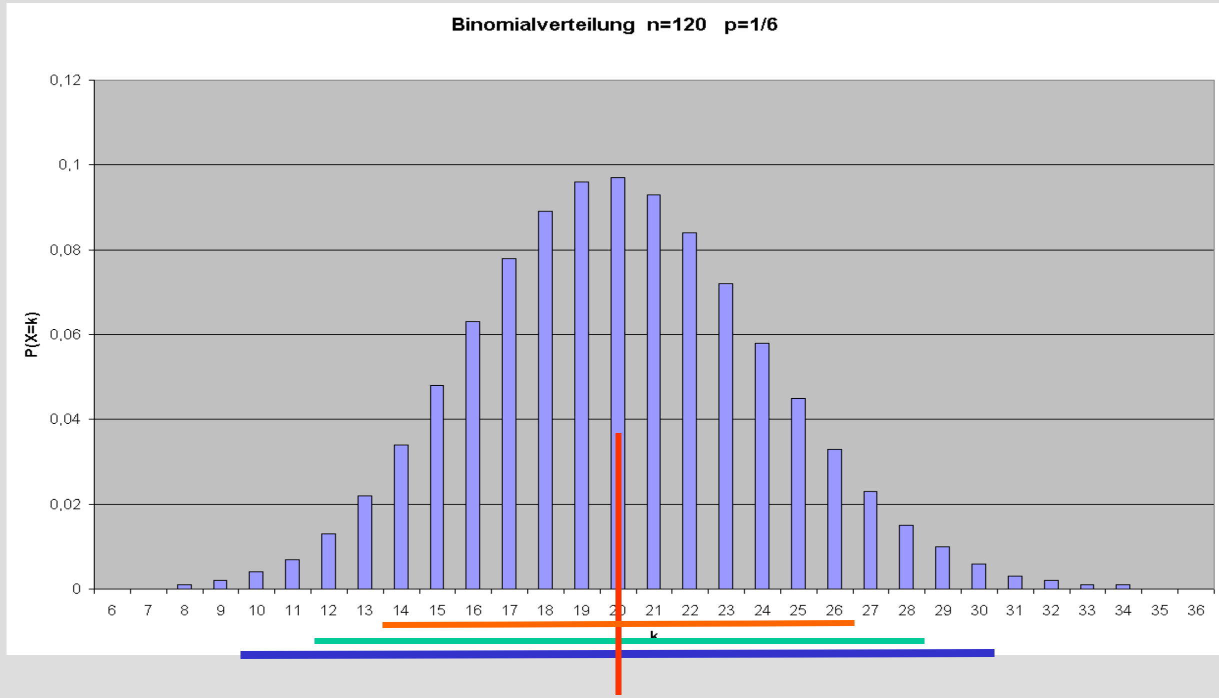
$$\mu = np = 20$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \cdot \frac{5}{6}} \approx 4,08$$

$$1,64 \cdot \sigma \approx 6,7$$

$$1,96 \cdot \sigma \approx 8,002$$

$$2,56 \cdot \sigma \approx 10,45$$



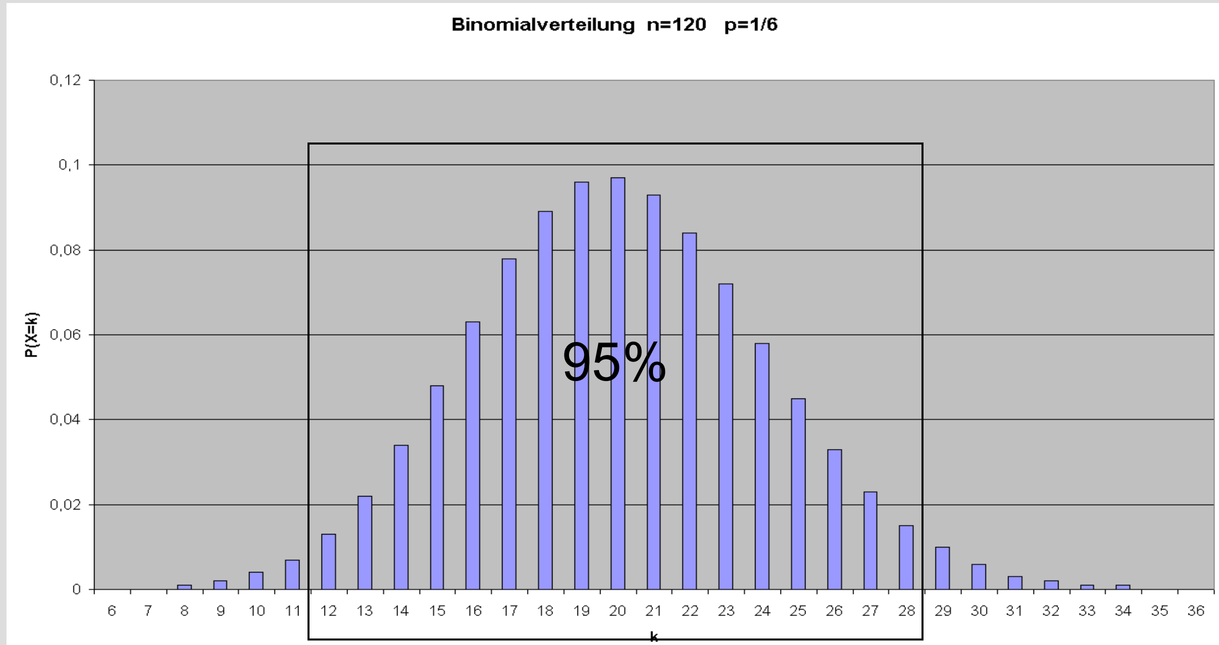
$$U_{90\%} = [14;26] \qquad U_{95\%} = [12;28] \qquad U_{99\%} = [10;30]$$

95%-Entscheidungsregel :

Ich verwerfe die Hypothese, wenn entweder $k<12$ oder $k>28$ ist.

Entscheidungsregel

$U_{95\%} = [12;28]$

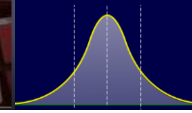


Ergebnisse außerhalb der $U_{95\%}$ -Umgebungen heißen ungewöhnlich, die Abweichung wird als signifikant bezeichnet.

95%-Entscheidungsregel :

Ich verwerfe die Hypothese, wenn entweder k<12 oder k>28 ist

Ich verwerfe also die Hypothese für k=25 nicht !



Entscheidungsregel

$$U_{95\%} = [12;28]$$

95%-Entscheidungsregel :

Ich verwerfe die Hypothese, wenn entweder $k<12$ oder $k>28$ ist

Das Ergebnis $k=25$ ist verträglich mit der Hypothese, also verwerfe ich diese nicht. Ich behalte sie bei.

Vorsicht! Eine Annahme, dass die Hypothese gültig ist, ist damit nicht möglich, weil dieses Ergebnis $k=25$ auch mit anderen Hypothesen verträglich ist.

z.B. H: Der Würfel ist nicht ideal. $p_6=0,18$

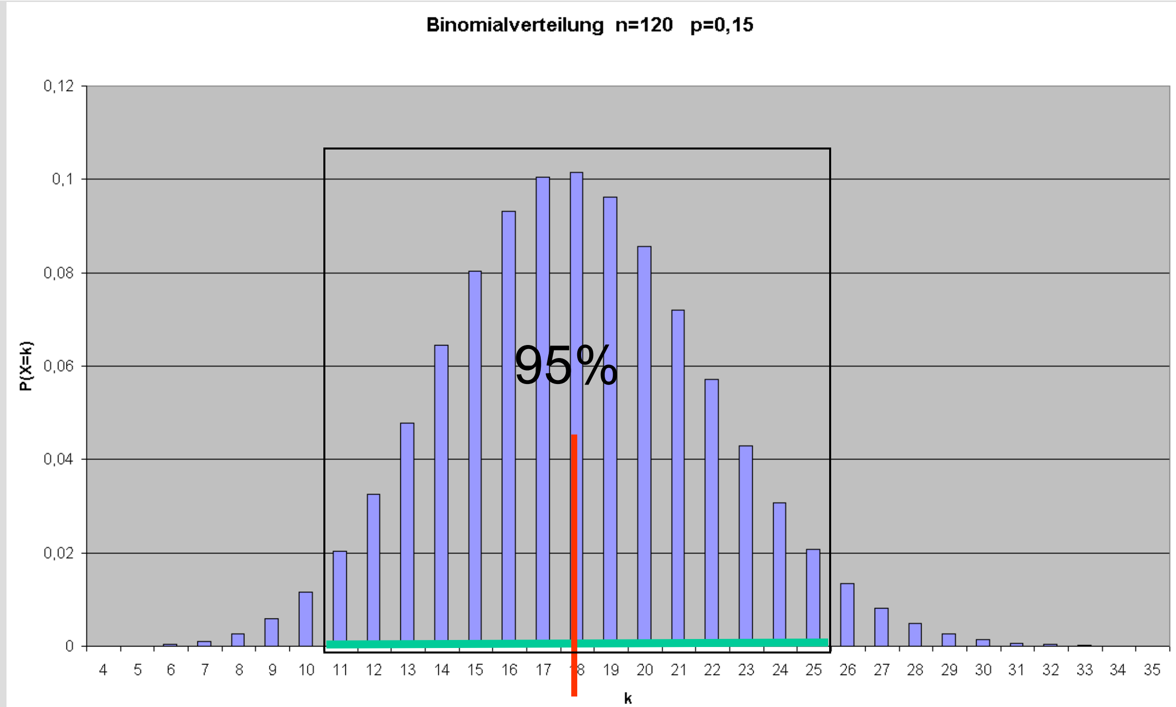
Entscheidungsregel

$$\mu = np = 18$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{18 \cdot 0{,}85} \approx 3{,}92$$

$$1{,}96 \cdot \sigma \approx 7{,}67$$

$$U_{95\%} = [11;25]$$



95%-Entscheidungsregel : Ich verwerfe die Hypothese H wenn entweder k<11 oder k>26 ist

Das Ergebnis k=25 ist auch verträglich mit der Hypothese H , also verwerfe ich auch diese nicht.

Die Annahme von H_0 bzw. die Ablehnung von H_0

Die Annahme von H_0 ist keine Bestätigung von H_0 !

Die Ablehnung von H_0 ist keine zwingende, logische Widerlegung von H_0 !

Im Test werden wir zu einer Entscheidung gezwungen und handeln nach einer von uns festgelegten Strategie.

Solange wir Beobachtungen mit unserem Wissen erklären können, sehen wir keinen Grund an ihnen zu zweifeln.

Unser Weltbild

Ich denke, also bin ich!

Da bin ich mir sicher

Descartes 1637 : Je pense donc je suis!

H_{01} : Die Dinge, die ich mit meinen Sinnen erfasse gibt es!

H_{02} : Eine gute Ausbildung ist Grundlage für meinen Erfolg im Beruf.

H_{03} : Es gibt ein „Leben“ nach dem Tod.

H_{04} : Die Rente ist sicher.

Diese behalten wir so lange bei, bis wir sie nicht mehr mit unseren Erfahrungen vereinbaren können.

u.s.w.

Das Beibehalten der Hypothese

Das Ergebnis eines Zufallsversuchs spricht nicht gegen die Annahme.
Was heißt das schon?

Beispiel: In meinem Weltbild ist die Welt voller Trolle.
Nullhypothese: Trolle sind unsichtbar?

Entscheidungsregel: Ich behalte die Hypothese bei, wenn sich in einer Stichprobe kein Mensch findet, der glaubhaft nachweisen kann, einen Troll gesehen zu haben.

Das Beibehalten der Hypothese

Ergebnis der Stichprobe: k=0

Also behalte ich mein Weltbild bei!

Das Verwerfen der Hypothese

Entweder ist H_0 wirklich falsch, oder es ist ein seltenes Ereignis eingetreten, dessen Wahrscheinlichkeit wir abschätzen können.

Casinowürfel

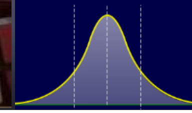
$$\mu = np = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

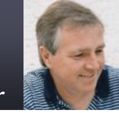
$$\sigma = \sqrt{npq} =$$

$$\sqrt{20 \cdot \frac{5}{6}} \approx 4{,}08 > 3$$

95%-Entscheidungsregel :Ich verwerfe die Hypothese, wenn entweder $k<12$ oder $k>28$ ist.

$k=30 \Rightarrow$ Ich verwerfe die Hypothese H_0 .

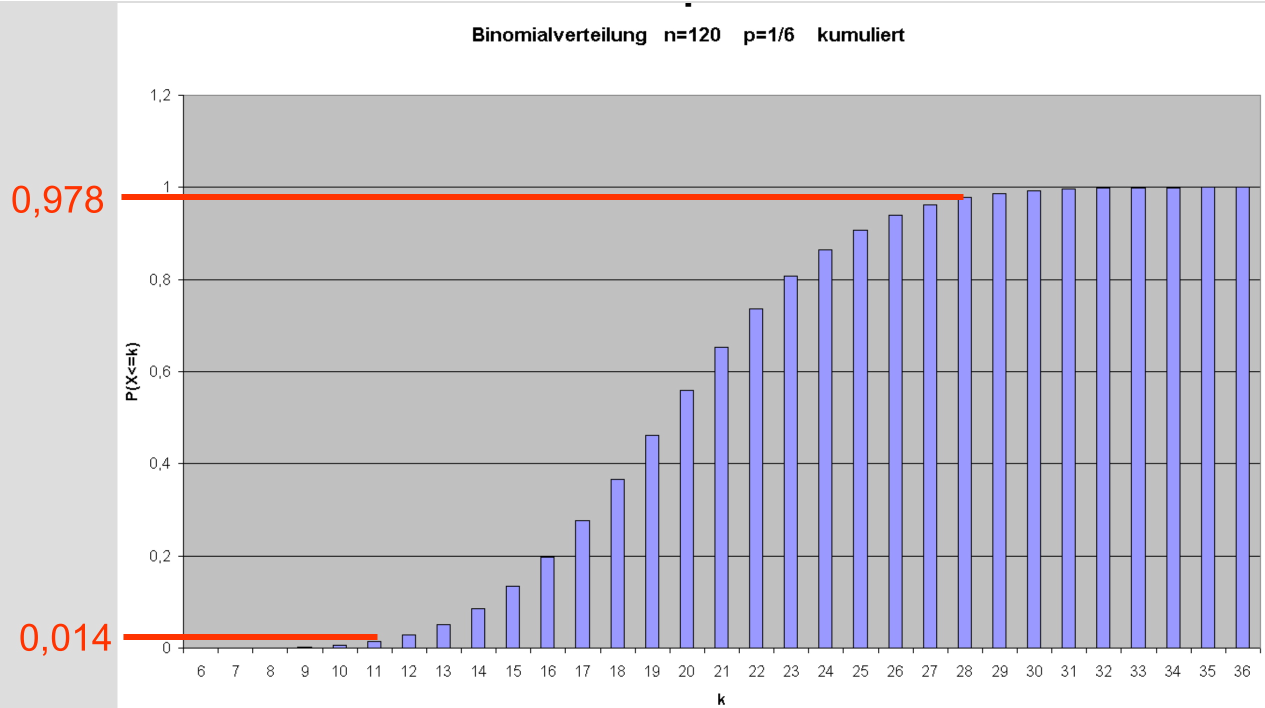




Verwerfen einer Hypothese

$$P(X > 28)$$
$$= 1 - P(X \leq 28)$$
$$\approx 1 - 0{,}978 \approx 0{,}022$$

$$P(X < 12)$$
$$= P(X \leq 11) \approx 0{,}014$$



$$P(X < 12 \text{oder } X > 28) = 0{,}036$$

Ich verwerfe die Hypothese H_0 in 5% (genauer 3,6%) der Fälle zu unrecht, denn auch solche Ergebnisse treten bei einem idealen Würfel auf.

Fehler 1. Art.

Fehler 1. und 2. Art

Beim Testen der Hypothese H_0 : $p=p_0$ sind folgende Entscheidungen und Fehler möglich:

Test	Entscheidung	$p=p_0$	Bewertung
$k \notin U_{95\%}$	H_0 wird abgelehnt	wahr	Fehlentscheidung Fehler 1. Art
		falsch	richtige Entscheidung
$k \in U_{95\%}$	H_0 wird beibehalten	wahr	richtige Entscheidung
		falsch	Fehlentscheidung Fehler 2. Art

Fehler 1.Art

Dieses Ziel ist unerreichbar, denn Fehler sind unvermeidlich, da wir die Wahrheit nicht kennen.

Wir haben aber die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art zu kontrollieren

Gerichtsverfahren: Testen einer Hypothese

Angeklagt ist H_0

Spricht H_o die Wahrheit oder lügt H_0 ?

Grundlage des Prozesses ist die Unschuldsvermutung von H_0

Die Annahme von H_0 ist ein Freispruch mangels Beweises.
Die Indizien haben nicht ausgereicht H_0 zu widerlegen.

Fehler 1. Art ist die Verurteilung eines Unschuldigen
Fehler 2. Art ist der Freispruch eines Schuldigen.

Beispielaufgabe 1 (Einseitiger Test einer Hypothese)

In ein Spielcasino wurden neben korrekten Würfeln auch gefälschte Würfel, die angeblich eine 6 mit p=0,25 produzieren untergeschoben. Das Casino beschließt alle Würfel durch jeweils 100 Testwürfe zu prüfen.

H_0 : Es handelt sich um einen Laplace-Würfel
$p_6 = 1/6$ Nullhypothese

Sei also X die Anzahl der gewürfelten Sechsen
p6 >1/6 ($p_6 = 0{,}25$) Gegenhypothese

Dann ist $E(X) \approx 17$ und $\sigma = 3{,}7$

Beispielaufgabe 1 (Einseitiger Test)

Mit einer zunächst willkürlich gewählten Zahl k=25 wird eine Entscheidungsregel formuliert: Bei mehr als 25 Sechsen wird der Würfel als gefälscht eingestuft.

Fehler 1. Art : (unschuldig aber verurteilt)
Ein Laplace-Würfel wird fälschlicherweise als gefälscht eingestuft.

Fehler 2. Art : (schuldig aber freigesprochen)
Ein gefälschter Würfel wird fälschlicherweise als Laplace-Würfel angesehen.

$$\alpha = P(X > k) = 1 - P(X \leq 25)$$
$$= 1 - 0{,}988 = 0{,}012$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,2% Begehen wir einen Fehler 1. Art

Dieser Fehler ist vertretbar klein.

Beispielaufgabe 1 (Einseitiger Test)

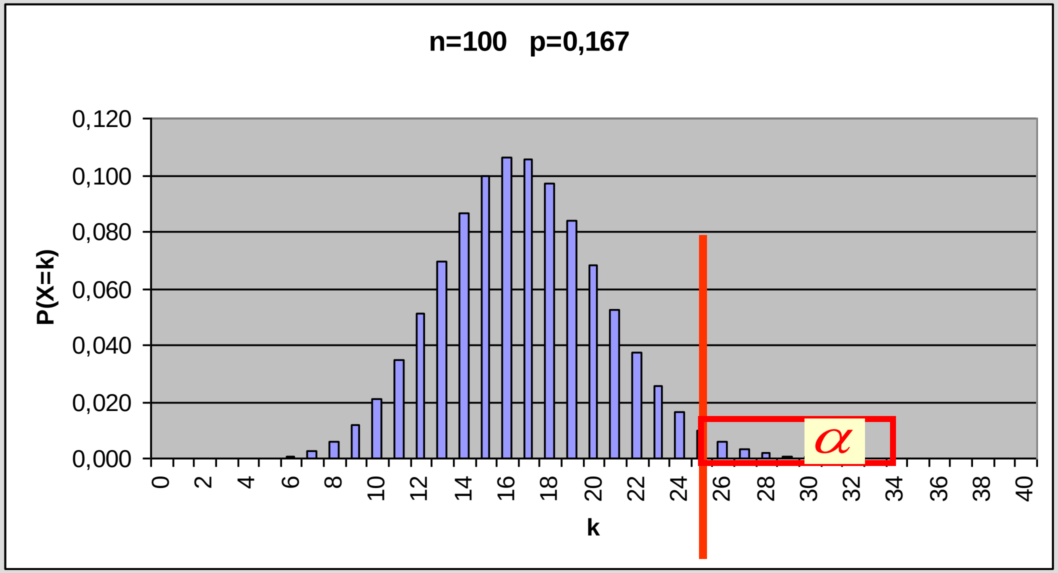
Fehler 2. Art : (schuldig aber freigesprochen)
Ein gefälschter Würfel wird fälschlicherweise als Laplace-Würfel angesehen.

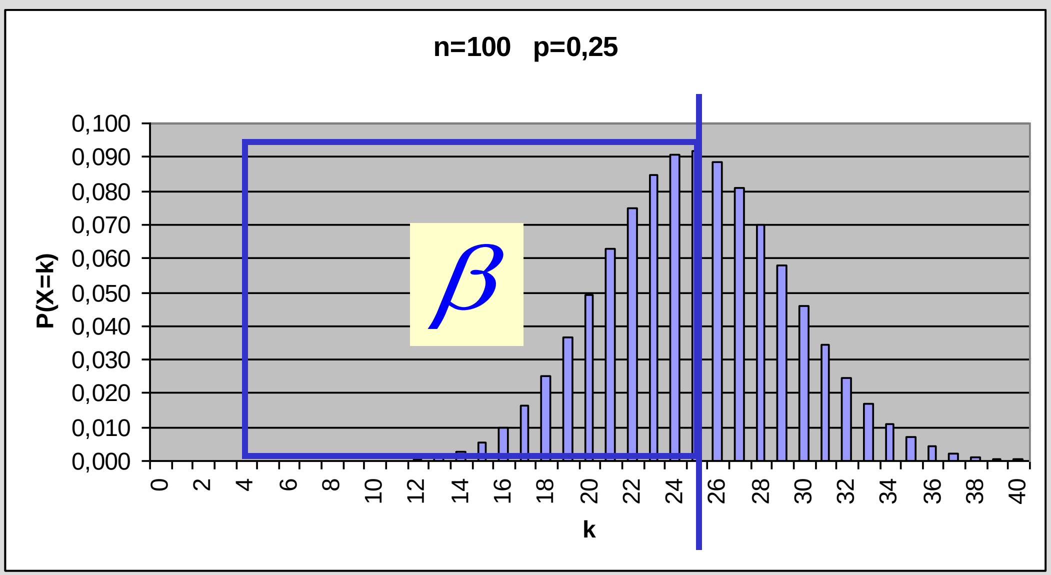
$$\beta = P(X \leq k) = P(X \leq 25)$$
$$= 0{,}553$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 55,3% Begehen wir einen Fehler 2. Art d.h. wir sehen einen gefälschten Würfel als Laplace-Würfel an.

p6=0,25 ??

Beispielaufgabe 1 (Einseitiger Test)



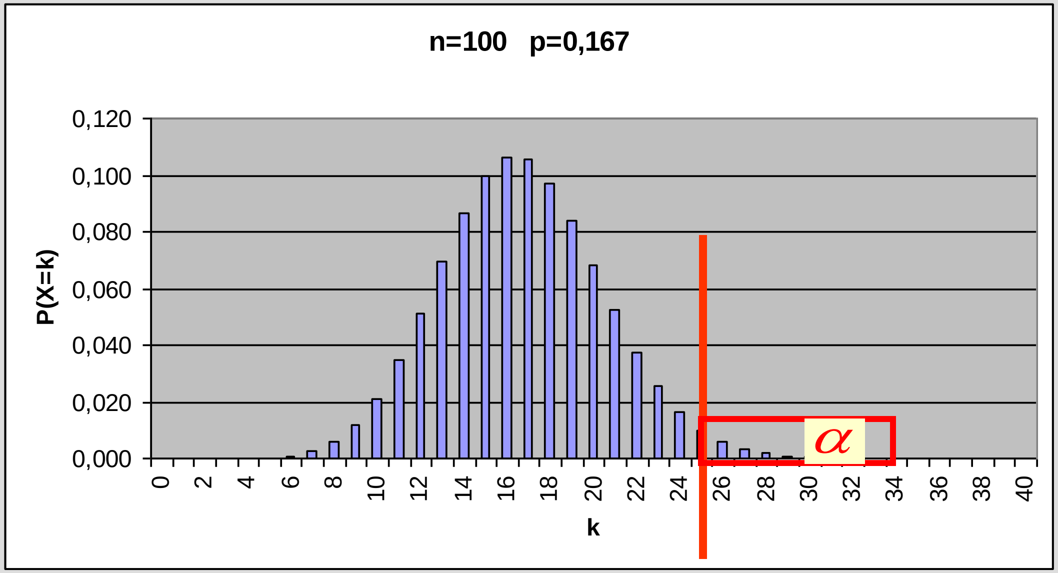


$$\alpha = P(X > k) = 1 - P(X \le 25)$$
$$= 1 - 0{,}988 = 0{,}012$$

$$\beta = P(X \le k) = P(X \le 25)$$
$$= 0{,}553$$

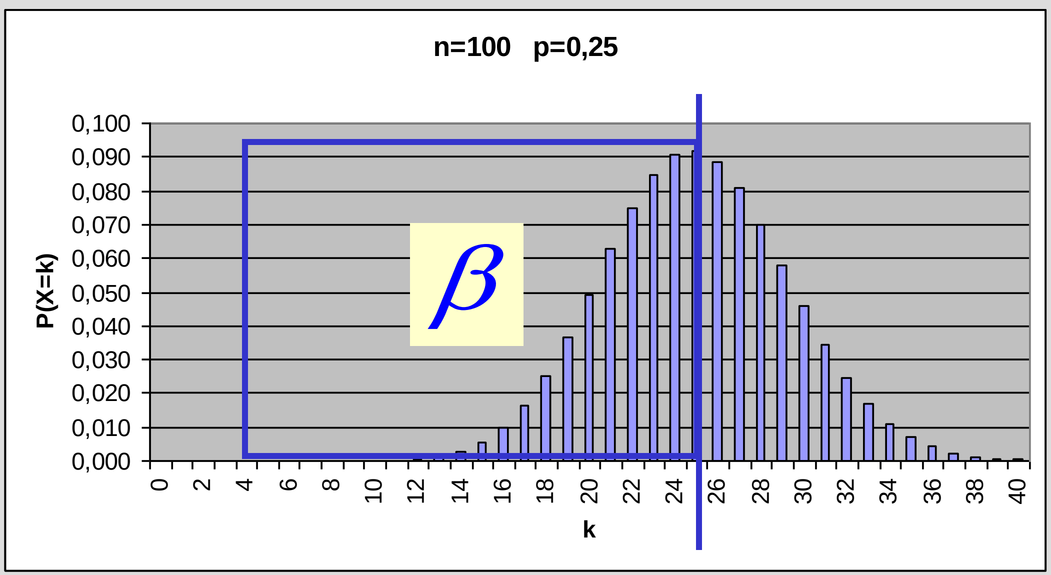
p6=0,25

Beispielaufgabe 1 (Einseitiger Test)



$$\alpha = P(X > k) = 1 - P(X \leq 25)$$
$$= 1 - 0{,}988 = 0{,}012$$

$$\beta = P(X \leq k) = P(X \leq 25)$$
$$= 0{,}553$$



p6=0,25

Beispielaufgabe 1 (Einseitiger Test)

Mit einer zunächst willkürlich gewählten Zahl k=25 wird eine neue Entscheidungsregel formuliert: Bei weiniger als 25 Sechsen wird H_0 nicht abgelehnt, bei mehr als 25 Sechsen wird H_0 abgelehnt.

Nur wenn man mehr als 25 Sechsen gewürfelt hat , kann man eine brauchbare Schlussfolgerung ziehen!

Nur das Ablehnen ist eine starke Waffe!

Beispielaufgabe 1 (Einseitiger Test)

In der Praxis gibt man häufig eine obere Schranke für α vor, etwa $\alpha=5\%$ und bestimmt dann die kleinste Zahl k, für die der Fehler 1. Art gerade α ist.

$$\alpha = P(X > k) = 1 - P(X \le k)$$

$$\Rightarrow P(X \le k) \ge 1 - \alpha = 95\%$$

$$\text{Tabelle: } \quad k = 23$$

Ergeben sich also bei dem Versuch mehr als 23 Sechsen, so kann man mit einer Sicherheit von mindestens 95% sagen, dass der Würfel gefälscht ist.

Beispielaufgabe 2 (Zweiseitiger Test einer Hypothese)

In ein Spielcasino wurden neben korrekten Würfeln auch gefälschte Würfel, die angeblich eine 6 mit $p<1/6$ bzw. mit $p>1/6$ produzieren untergeschoben. Das Casino beschließt alle Würfel durch jeweils 100 Testwürfe zu prüfen.

H_0 : Es handelt sich um einen Laplace-Würfel
$p_6 = 1/6$ Nullhypothese

H_1 : Es handelt sich um einen gefälschten Würfel mit
$p_6 > 1/6$ oder $p_6 < 1/6$ Gegenhypothese

Da der Würfel hier auch zu selten eine 6 produzieren kann, muss der Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf beiden Seiten von E(X) liegen.

Beispielaufgabe 2 (Zweiseitiger Test einer Hypothese)

H_0 : Es handelt sich um einen Laplace-Würfel
$p_6 = 1/6$ Nullhypothese

H_1 : Es handelt sich um einen gefälschten Würfel mit
$p_6 > 1/6$ oder $p_6 < 1/6$ Gegenhypothese

Der Ablehnungsbereich hat also die Form:

$$[0,1,\ldots,k_l] \cup [k_r,\ldots,100]$$

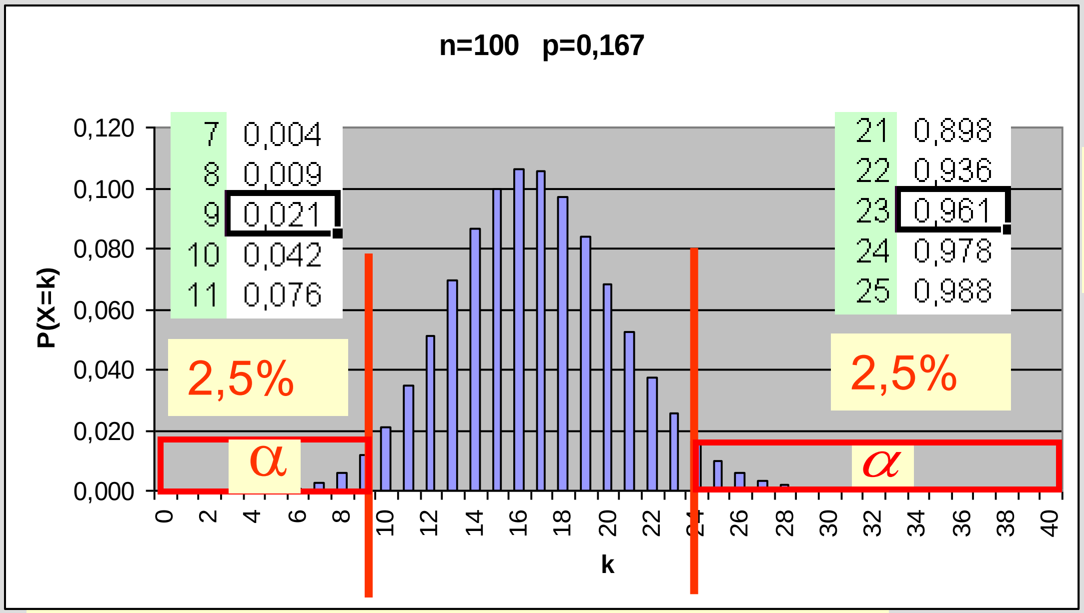
$$5\% \geq P(X \leq k_l \;\vee\; X \geq k_r)$$

$$5\% \geq P(X \leq k_l) + 1 - P(X \leq k_{r-1})$$

Beispielaufgabe 2 (Zweiseitiger Test einer Hypothese)

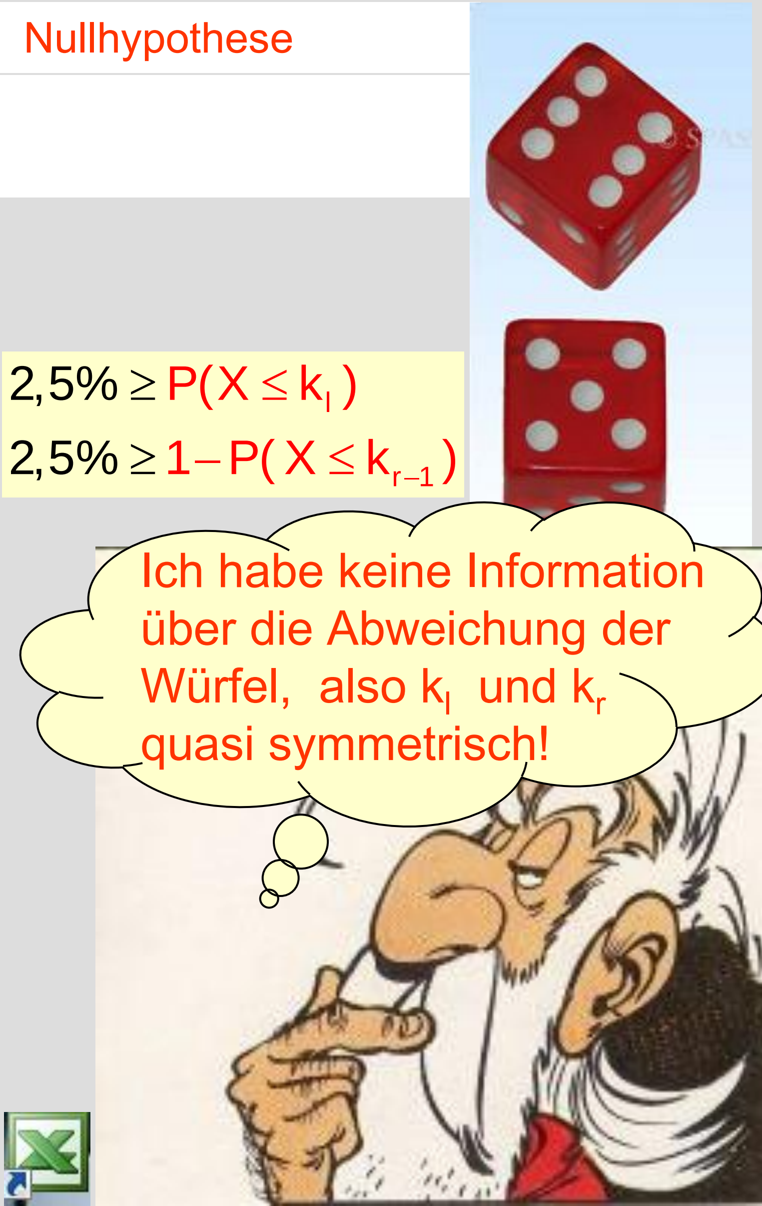
H_0 : Es handelt sich um einen Laplace-Würfel $p_6 = 1/6$ Nullhypothese

H_1 : Es handelt sich um einen gefälschten Würfel mit $p_6 > 1/6$ oder $p_6 < 1/6$ Gegenhypothese



$$2{,}5\% \geq P(X \leq k_l)$$

$$2{,}5\% \geq 1 - P(X \leq k_{r-1})$$



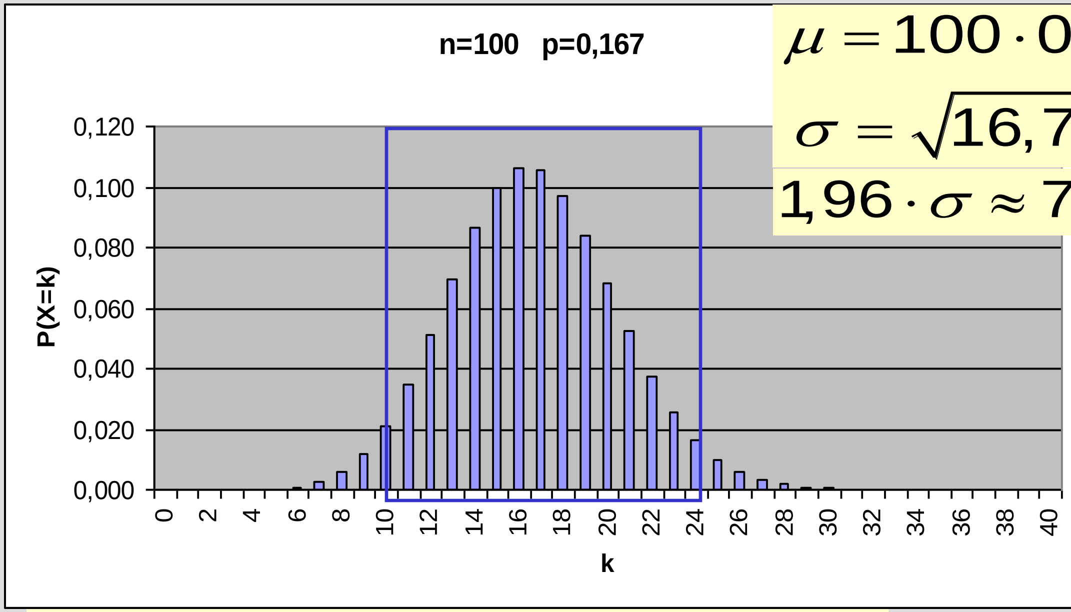
Ablehnungsbereich für H_o

$$[0,1,.....9] \cup [24....100]$$

Beispielaufgabe 2 (Zweiseitiger Test einer Hypothese)

H_0 : Es handelt sich um einen Laplace-Würfel $p_6 = 1/6$ Nullhypothese

H_1 : Es handelt sich um einen gefälschten Würfel mit $p_6 > 1/6$ oder $p_6 < 1/6$ Gegenhypothese



$$\mu = 100 \cdot 0{,}167 \approx 17$$

$$\sigma = \sqrt{16{,}7 \cdot 0{,}833} \approx 3{,}7 > 3$$

$$1{,}96 \cdot \sigma \approx 7{,}3$$

$$U_{95\%} = [10;24]$$

EXCEL

95,7%

Ablehnungsbereich für H_o

$$[0{,}1,\ldots..9] \cup [25\ldots.100]$$

Wie konstruiert man nun einen Test?

Je größer man k wählt, desto kleiner ist der Fehler 1. Art d.h. man hält selten einen echten Würfel für gefälscht.

Positiv ausgedrückt: Fast jeder als gefälscht gehaltene Würfel ist tatsächlich gefälscht.

Erkauft wird diese Sicherheit aber durch eine hohe Anzahl an Würfeln, die nicht als gefälscht erkannt werden, obwohl sie gefälscht sind!

Das ist ein echtes Dilemma! Ich muss mir darüber klar sein, was ich eigentlich will.

Ich spreche lieber einen Schuldigen frei, als einen Unschuldigen zu verurteilen!
In dubio pro reo!

Wie konstruiert man nun einen Test?

Je kleiner man k wählt, desto größer ist der Fehler 1. Art und der Fehler 2. Art wird kleiner.

Die Fehlerschranke für α kann also nicht berechnet werden, sondern ist bestimmt durch die Absicht, die mit dem Test verbunden ist.

Übungsaufgabe 1

Im Zusammenhang mit der Frage, ob weitere Folgen einer neuen Familienserie ausgestrahlt werden sollen, wird behauptet, dass mindestens 60% aller Fernsehzuschauer die Serie regelmäßig sehen. Um diese Hypothese zu überprüfen, werden 50 Fernsehzuschauer befragt. Wie ist der Ablehnungsbereich zu wählen, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art höchstens 5% beträgt?

H_0: Mindestens 60% sehen die Serie regelmäßig. $p_0 \geq 0,6$

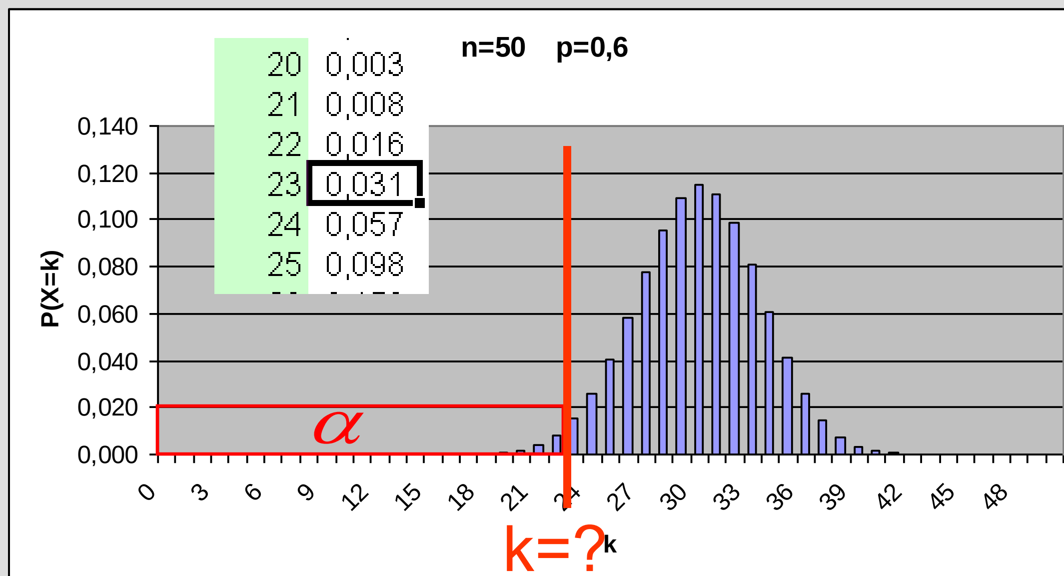
H_1: Weniger als 40% sehen die Serie regelmäßig. $p_1 < 0,4$

n=50 stufiges B.E. p=0,6 Erfolg: …sieht regelmäßig

$$\alpha < 0,05$$

$$P(X \leq k) < 0,05$$

Wenn 23 oder weniger der Befragten die Serie nicht regelmäßig sehen, wird die Nullhypothese verworfen!



Übungsaufgabe 2

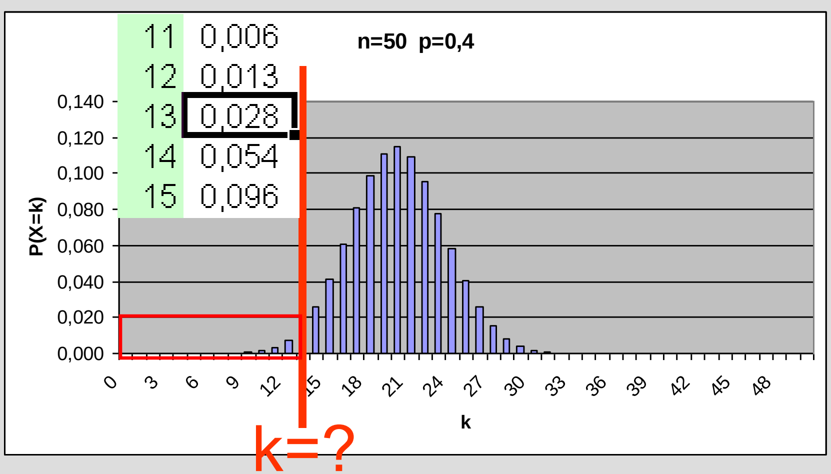
Im Zusammenhang mit der Frage, ob weitere Folgen einer neuen Familienserie ausgestrahlt werden sollen, wird behauptet, dass höchstens 40% aller Fernsehzuschauer die Serie *nicht* regelmäßig sehen. Um diese Hypothese zu überprüfen, werden 50 Fernsehzuschauer befragt. Wie ist der Ablehnungsbereich zu wählen, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art höchstens 5% beträgt?

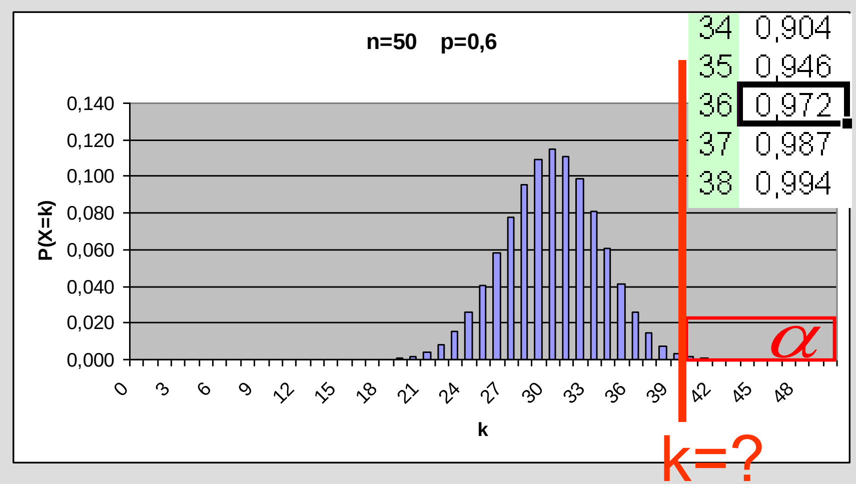
H_0: Höchstens 40% sehen die Serie nicht regelmäßig. $p_0 \leq 0,4$

H_1: Mehr als 40% sehen die Serie nicht regelmäßig. $p_1 > 0,4$

n=50 stufiges B.E. p=0,6 Erfolg: …sieht regelmäßig

oder n=50 stufiges B.E. p=0,4 Erfolg: …sieht nicht regelmäßig





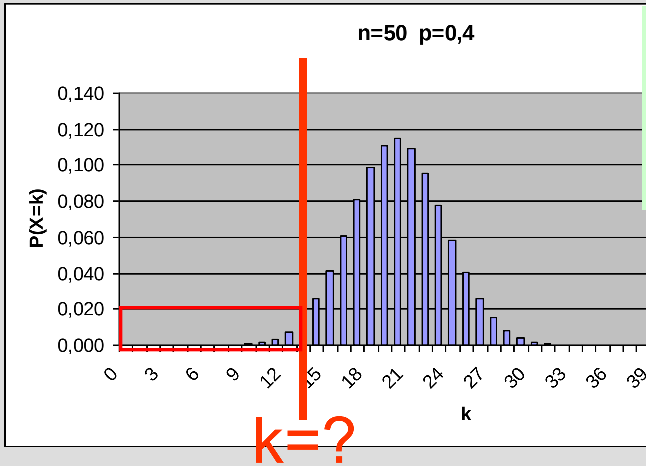
Übungsaufgabe 2

H_0: Höchstens 40% sehen die Serie nicht regelmäßig. $p_0 \leq 0,4$

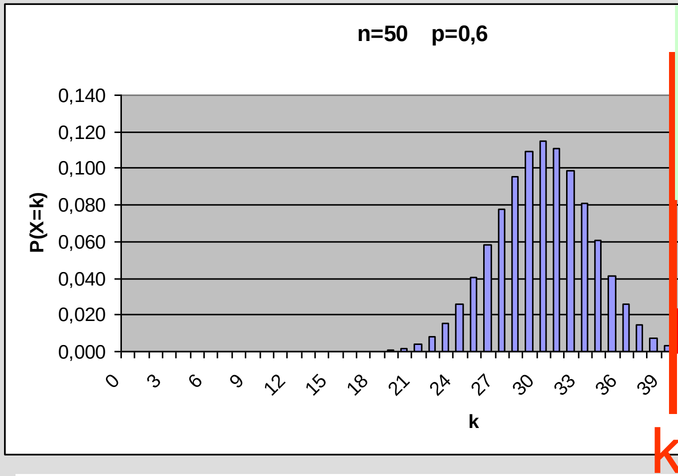
H_1: Mehr als 40% sehen die Serie nicht regelmäßig. $p_1 > 0,4$

n=50 stufiges B.E. p=0,4 Erfolg: …sieht nicht regelmäßig

oder n=50 stufiges B.E. p=0,6 Erfolg: …sieht regelmäßig



11	0,006
12	0,013
13	0,028
14	0,054
15	0,096



34	0,904
35	0,946
36	0,972
37	0,987
38	0,994

Wenn 13 oder weniger der Befragten die Serie nicht regelmäßig sehen, wird die Nullhypothese verworfen!

$\Leftrightarrow$

Wenn 36 oder mehr der Befragten die Serie regelmäßig sehen, wird die Nullhypothese verworfen!

Übungsaufgabe 3

Im Zusammenhang mit der Frage, ob weitere Folgen einer neuen Familienserie ausgestrahlt werden sollen, wird behauptet, dass genau 60% aller Fernsehzuschauer regelmäßig die Serie sehen. Um diese Hypothese zu überprüfen, werden 50 Fernsehzuschauer befragt. Wie ist der Ablehnungsbereich zu wählen, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art höchstens 5% beträgt?

H_0: Genau 60% sehen die Serie regelmäßig. $p_0 = 0,6$

H_1: 0%.....59% oder 61%.....100% sehen die Serie nicht regelmäßig. $p_1 \neq 0,6$

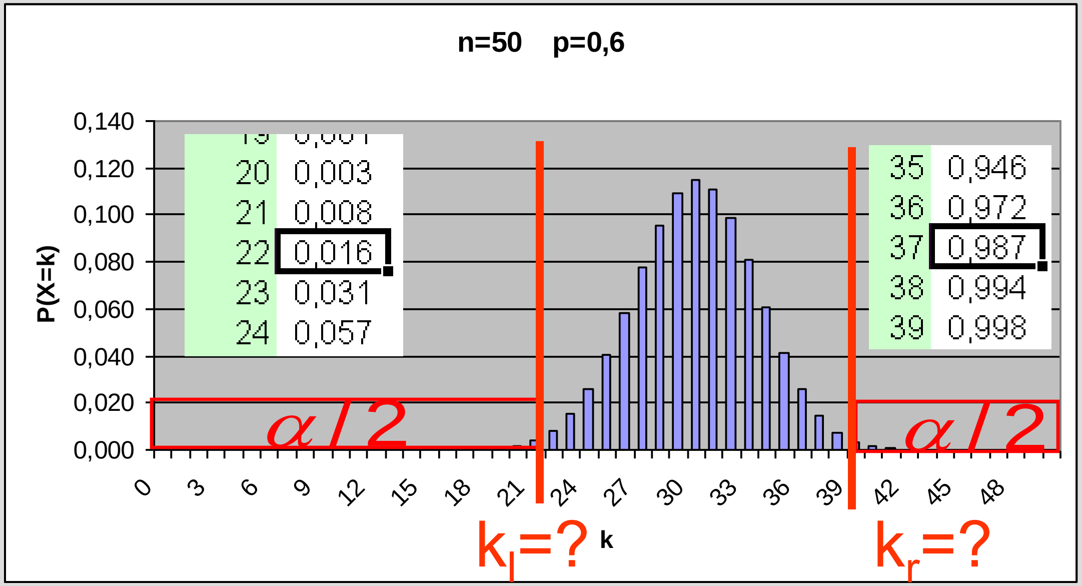
n=50 stufiges B.E. p=0,6 Erfolg: …sieht regelmäßig

$$\alpha < 0,05$$

$$P(X \leq k_l) < 0,025$$

$$P(X \geq k_r) < 0,025$$

Wenn 22 oder weniger oder aber 37 und mehr der Befragten die Serie nicht regelmäßig sehen, Nullhypothese verworfen!



Übungsaufgabe 3

Im Zusammenhang mit der Frage, ob weitere Folgen einer neuen Familienserie ausgestrahlt werden sollen, wird behauptet, dass genau 60% aller Fernsehzuschauer regelmäßig die Serie sehen. Um diese Hypothese zu überprüfen, werden 50 Fernsehzuschauer befragt. Wie ist der Ablehnungsbereich zu wählen, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art höchstens 5% beträgt?

H_0: Genau 60% sehen die Serie regelmäßig. $p_0 = 0,6$

H_1: 0%…..59% oder 61%…..100% sehen die Serie nicht regelmäßig. $p_1 \neq 0,6$

n=50 stufiges B.E. p=0,6 Erfolg: …sieht regelmäßig

$$\mu = 50 \cdot 0,6 = 30$$

$$\sigma = \sqrt{30 \cdot 0,4} \approx 3,5 > 3$$

$$1,96 \cdot \sigma \approx 6,8$$

Wenn 23 oder weniger **oder aber** 37 und mehr der Befragten die Serie nicht regelmäßig sehen, wird die Nullhypothese verworfen!