ABI-Übung Kunterbunt Lösungen (wird noch erweitert !)

2.1	$f(x)=\begin{cases}4(1-x)e^{x-1} & x\le 1\\ -\dfrac{4\ln x}{x} & x>1\end{cases}$ Bestimme f'(x) und untersuchen Sie, ob f' an der Stelle x=1 existiert. $f'(x)=\begin{cases}-4xe^{x-1} & x<1\\ -4(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2}) & x>1\end{cases}$ $\left[\lim\limits_{x\to 1-}(-4xe^{x-1})=-4 \wedge \lim\limits_{x\to 1+}-4(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln x}{x^2})=-4\right]\Rightarrow f'(1)=-4$
2.2	Bestimme $\int 4(1-x)e^{x-1}dx$ u=x-1 $\dfrac{du}{dx}=1\Rightarrow dx=du$ $\int 4(1-x)e^{x-1}dx=-4\int ue^{u}du$ $\text{Partiell}: \int ue^{u}du=(u-1)e^{u}+c$ $\int 4(1-x)e^{x-1}dx=-4(u-1)e^{u}=-4(x-2)e^{x-1}+c$ Zur Kontrolle ableiten!
2.3	$f(x)=\dfrac{2e^x}{2-e^x}\quad x\ne\ln 2\ ;\quad g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ Begründe, warum f und g umkehrbar sind und bestimme die Umkehrfunktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(2-e^x)^2}>0\quad x\ne\ln 2\ ;$ $g'(x)=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$ d.h. f und g sind umkehrbar ! $\bar{f}(x)=\ln\dfrac{2x}{x+2}\quad ;\quad \bar{g}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{1-x}$

2.4	Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}(a-e^{-x})$ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}(a-e^{-x})$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-0+}{1+0+}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}(a-e^{-x})=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}(a-e^{-x})=-\infty$
2.5	Bestimme eine Stammfunktion zu $h(x)=\ln\frac{x+2}{x^2}$; $x>2$ $h(x)=\ln\frac{x+2}{x^2}=\ln(x+2)-2\ln(x)$ $\int\ln(x+2)dx=\int\ln u du = u\ln u-u=(x+2)\ln(x+2)-(x+2)$ $u=x+2$ $du=dx$ $\Rightarrow H(x)=(x+2)\ln(x+2)-(x+2)-2x\ln x+2x+c$ $=(x+2)\ln(x+2)-2x\ln x+x+\tilde{c}$ $\tilde{c}=c+2$
2.6	Zeige, dass der Graph zu $f_a(x)=\frac{5e^{ax}}{1+e^{ax}}$ punktsymmetrisch zu (0; 2,5) ist. Bedingung : $f(0+x)-f(0)=f(0)-f(0-x)$ $f_a(0+x)=\frac{5e^{ax}}{1+e^{ax}}$ $f_a(0)=\frac{5}{2}$ $f_a(0-x)=\frac{5e^{-ax}}{1+e^{-ax}}$ $\frac{5e^{ax}}{1+e^{ax}}-\frac{5}{2}=\frac{10e^{ax}-5(1+e^{ax})}{2(1+e^{ax})}=\frac{5e^{ax}-5}{2+2e^{ax}}$ $\frac{5}{2}-\frac{5e^{-ax}}{1+e^{-ax}}=\frac{5(1+e^{-ax})-10e^{-ax}}{2(1+e^{-ax})}=\frac{5-5e^{-ax}}{2+2e^{-ax}}=\frac{5e^{ax}-5}{2e^{ax}+2}$
2.7	Auf welchen Kurven liegen folgende Punkte ? $P(-2k/\frac{1}{4k})$ $Q(-\frac{1}{2a}/-4e^{-0,5\sqrt{\frac{1}{a^2}}})$ $a>0$ $x=-2k\Rightarrow k=-\frac{1}{2}x\Rightarrow y=-\frac{1}{2x}$ $x=-\frac{1}{2a}\Rightarrow a=-\frac{1}{2x}\Rightarrow y=-4e^{-0,5\sqrt{4x^2}}=-4e^{-\|x\|}$

2.8	Bestimme die Gleichung der Wendetangente zu $f(x)=2\frac{x+1}{e^{2x}}=2(x+1)e^{-2x}$ $f'(x)=-2xe^{-2x} \quad f''(x)=2(2x-1)e^{-2x}$ $f''(\frac{1}{2})=0 \qquad x<\frac{1}{2}: f''(x)<0 \quad x>\frac{1}{2}: f''(x)>0$ d.h. $W(\frac{1}{2}\mid\frac{3}{e})$ Wendetangente $t: \; y=mx+b \quad m=-\frac{1}{e}$ $W\in t: \; \frac{3}{e}=-\frac{1}{2e}+b \quad \Rightarrow \; b=\frac{7}{2e}$ $t(x)=-\frac{1}{e}x+\frac{7}{2e}$
2.9	Bestimme eine Stammfunktion zu $f(x)=2\frac{x+1}{e^{2x}}$ $f(x)=2\frac{x+1}{e^{2x}}=2xe^{-2x}+2e^{-2x}$ $\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c_1$ $\int xe^{-2x}dx=x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)+\frac{1}{2}\int xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c_2$ $\Rightarrow 2\int\frac{x+1}{e^{2x}}dx=-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-2x}+c=-xe^{-2x}-\frac{3}{2}e^{-2x}+c$
2.10	Bestimme eine Stammfunktion zu $h(x)=\ln\frac{x}{4-x} \quad$ Hinweis: $\int\ln x\,dx=x\ln x-x+c$ $h(x)=\ln\frac{x}{4-x}=\ln x-\ln(4-x) \qquad \frac{x}{4-x}>0;\; x\neq 4$ $\int\ln(4-x)dx=-\int\ln u\,du \qquad u=4-x \quad \frac{du}{dx}=-1$ $=-u\ln u+u+c_2=-(4-x)\ln(4-x)+(4-x)+c_2$ $\Rightarrow \int\ln\frac{x}{4-x}dx=x\ln x-x+c_1+(4-x)\ln(4-x)-4+c_2$ $=x\ln x-x+(4-x)\ln(4-x)+c$ Probe durch ableiten !

2.11	Bestimme eine Stammfunktion zu $k(x)=\frac{3}{2(2-x)}$;$x\neq 2$ Hinweis: geeignete Substitution wählen. $\int\frac{3}{2(2-x)}dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{(2-x)}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{u}du=-\frac{3}{2}\ln\lvert u\rvert+c$ $=-\frac{3}{2}\ln\lvert 2-x\rvert+c$
2.12	Für die Funktionen der Schar $f_a(X)=\frac{2e^x}{a+e^{2x}}$;$a\in\mathbb{R}^+$ gilt $f_a(\ln\sqrt{a}+x)=f_a(\ln\sqrt{a}-x)$ (Nachweis !) Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Beziehung. $f_a(\ln\sqrt{a}+x)=\frac{2e^{\ln\sqrt{a}+x}}{a+e^{2\ln\sqrt{a}+2x}}=\frac{2e^{\ln\sqrt{a}}\cdot e^x}{a+e^{2\ln\sqrt{a}}\cdot e^{2x}}=\frac{2\sqrt{a}e^x}{a+ae^{2x}}$ $f_a(\ln\sqrt{a}-x)=\frac{2e^{\ln\sqrt{a}-x}}{a+e^{2\ln\sqrt{a}-2x}}=\frac{2e^{\ln\sqrt{a}}\cdot e^{-x}\cdot e^{2x}}{(a+e^{2\ln\sqrt{a}}\cdot e^{-2x})e^{2x}}=\frac{2\sqrt{a}e^x}{ae^{2x}+a}$ d.h. f_a ist achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung x=lna
2.13	Bestimmen Sie die Ableitung: $f_a(x)=(ax-1)\cdot e^{1-ax^2}$ $f_a'(x)=a\cdot e^{1-ax^2}+(ax-1)\cdot e^{1-ax^2}\cdot(-2ax)=e^{1-ax^2}\cdot(3a-2a^2x)$
2.14	Bestimme $\int 4e^{-x}(a-e^{-x})dx$ $\int 4e^{-x}(a-e^{-x})dx=4a\int e^{-x}dx-4\int e^{-2x}dx$ $=-4ae^{-x}+2e^{-2x}+c$
2.15	Leite ab: $f(x)=\ln x(\ln x+x)$ $g(x)=(\ln x)^3$ $h(x)=e^{\sqrt{x}}$ $f'(x)=\frac{1}{x}(\ln x+x)+\ln x\cdot(\frac{1}{x}+1)=\left(\frac{2}{x}+1\right)\ln x+1$ $g'(x)=\frac{3}{x}(\ln x)^2$ $h'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.16	Bestimme eine Stammfunktion zu f(x)=lnx Hinweis: Schreibe lnx als Produkt (TRICK!) und Integriere partiell $\int 1\cdot \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$
2.17	Bestimme $\int xe^x dx$ $\int x^2e^x dx$ $\int x^3e^x dx$ $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$ $\int x^3e^x dx$ $\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2(x-1)e^x = (x^2-2x+2)e^x$ $\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx = (x^3-3x^2+6x-6)e^x$
2.18	Der Funktionsgraph zu g(x) ist achsensymmetrisch zum Graphen von $f(x)=(1-x)e^{-x}$ bzgl. der x-Achse (der y-Achse) Wie lautet die Funktionsgleichung von g jeweils ? $g_1(x)=(x-1)e^{-x}$ $g_2(x)=(1+x)e^{-x}$
2.19	Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x)=(x-a)\cdot \ln x$; $x\in \mathbb{R}^+$;$a\in \mathbb{R}$ Zeige, dass sich alle Scharkurven in genau einem Punkt S schneiden und gib die Koordinaten von S an. $f_a(x)=f_b(x)$;$a\neq b$ $(x-a)\ln x=(x-b)\ln x$ ist erfüllt, wenn $\ln x=0$ also $x=1$ ist. $S(1\|0)$ ist gemeinsamer Schnittpunkt aller Graphen.
2.20	Auf welcher Kurve liegen alle Punkte $P_a(\ln(1-a)/1+a^2)$;$0<a<1$ $x=\ln(1-a)\Rightarrow a=1-e^x$ $y=1+a^2=1+(1-e^x)^2$

2.21	Die Funktion $f_1(x) = -2(e^x - 1)^2$; $x \in \mathbb{R}$ ist im Intervall $]0;\infty[$ umkehrbar. a) Begründe diese Aussage b) Bestimme die Umkehrfunktion Mache dir klar, wie du den richtigen Zweig der Umkehrfunktion findest !
2.22	Bestimme den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot \ln(x+1)}$
2.23	Bestimme die Nullstellen von $g_k(x) = \ln\frac{x^2+k^2}{x}$ $k \in \mathbb{R}^+$; $x \in \mathbb{R}^+$ Fallunterscheidung!
2.24	Berechne die Funktionswerte $f_a(x) = 4e^{-x}(a - e^{-x})$ für $x = \ln a$; $x = -\ln\frac{a}{2}$ $g_a(x) = (\ln x - 2a)(\ln x + 2a)$ für $x = e^a$; $x = e^{2+a}$

Die Lösungen zur analytischen Geometrie sind noch nicht ins Reine geschrieben, sondern hängen handschriftlich eingescannt weiter unten an.

2.51	Die Punkte $A_k(2k-6/-k/3+3k)$ liegen für $k \in \mathbb{R}$ auf einer Geraden. Wie lautet die Gleichung dieser Geraden.
2.52	Gegeben sind die Punkte A(-2/1/2) B(3/-1/1) C(-1/4/-2) . Ergänze einen Punkt D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist. (Mehrere Möglichkeiten!)
2.53	Wie lautet die Gleichung einer Ebene E, die die Punkte A,B,C enthält in Parameterform bzw. in Normalenform.
2.54	Gib eine Gleichung der Geraden an, die den Ursprung O enthält und senkrecht zu der Ebene E verläuft.
2.55	Bestimme den Abstand d(O;E) und den Spiegelpunkt O* von O bei der Spiegelung an der Ebene E.
2.56	Gegeben ist die Ebenenschar $E_k: kx_1 + kx_2 + x_3 = 8 \;;\; k \in \mathbb{R}$ a) Zeige ,dass A(12/12/8) in jeder Ebene E_k liegt. b) Bestimme die Schnittpunkte von E_k mit den Koordinatenachsen.
2.57	Gegeben ist die Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ und den Punkten $A \in E$ und $C \in E$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A(5/0/-1)$ $C(-1/6/-1)$ a) Bestimme zwei Punkte $B,D \in E$ so, dass ABCD ein Quadrat ist. Bestimme zuerst den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$ und dann die Gleichung der Mittelsenkrechten zu $\overline{AC}$ in E. (Skizze !) b) Zeige, dass alle Punkte $S_k(14+4k\,/-3-5k\,/2+5k)$ auf einer Geraden liegen, die parallel zu E verläuft. c) Bestimme das Volumen der Pyramide $ABCDS_k$
2.58	a) Zeige, dass die vier Punkte A(2/0/4) ; B(-2/5/1); C(2/10/4) und D(6/5/7) ein Quadrat bilden. b) Gegeben ist die Ebenenschar $E_t:\; tx_1 + (7t-1)x_3 + (4-30t) = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass jede Ebene die Gerade AC enthält.

2.59	Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die Ebene E ? $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 12 = 0$
2.60	Gib zu $E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 12 = 0$ eine Ebene H an, die zu E parallel verläuft und einen Abstand d=5 L.E. zu E hat.
2.61	Beschreibe die Lage der Ebene E: $x_2 = t \; ; t \in \mathbb{R}$ im Koordinatensystem. Welchen Abstand hat der Ursprung O von E ?
2.62	Bestimme die Schnittpunkte der Ebene $E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 12 = 0$ mit den Koordinatenachsen (kurz: die Spurpunkte) und skizziere damit die Lage von E im Koordinatensystem.
2.63	
2.64	
2.65	

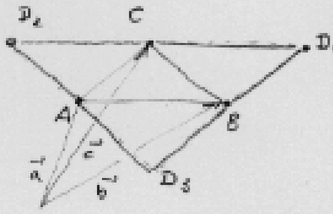
AG 1

1) $A_k(2k-6 \mid -k \mid 3+3k)$ $\quad g: \vec{a}_k = \begin{pmatrix}-6\\0\\3\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

2) $\vec{d}_1 = \vec{c} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{d}_2 = \vec{c} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{d}_3 = \vec{a} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}$



3) $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$

$= \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$

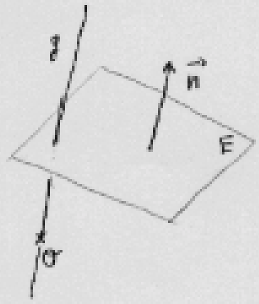
$\vec{n} = \left|\begin{matrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 5 & -2 & -1\\ 1 & 3 & -4\end{matrix}\right|\begin{matrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y\\ 5 & -2\\ 1 & 3\end{matrix} = \begin{pmatrix}8-(-3)\\-1-(-20)\\15-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\19\\17\end{pmatrix}$

$E: \vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

$\begin{pmatrix}11\\19\\17\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x_1+2\\x_2-1\\x_3-2\end{pmatrix} = 0$ $\qquad \boxed{11x_1 + 19x_2 + 17x_3 - 31 = 0}$

4) $g: \vec{x} = \vec{0} + \nu \cdot \vec{n}$

$= \nu \begin{pmatrix}11\\19\\17\end{pmatrix}$



HNF: $|\vec{n}| = \sqrt{11^2 + 19^2 + 17^2} = \sqrt{771}$

$\frac{11x_1 + 19x_2 + 17x_3 - 31}{\sqrt{771}} = 0$

$d(O, E) = \left|\frac{-31}{\sqrt{771}}\right| = |-1{,}12| = 1{,}12$ (L.E)

6) $E_k: kx_1 - kx_2 + x_3 = 8 \quad k \in \mathbb{R}$

Vorsicht! Schreibfehler in der Aufgabe $kx_1 \underset{+}{-} kx_2 + x_3 = 0$

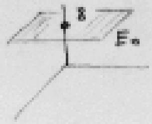
a) $(12|12|8) \in E_k$: $\quad 12k - 12k + 8 = 8$ ✓ für alle k

b) $x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 8 \qquad S_z(0|0|8)$

$x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \Rightarrow -kx_2 = 8$
$x_2 = -\frac{8}{k} \quad ⚡ k \neq 0 \qquad S_y(0|-\frac{8}{k}|0)$

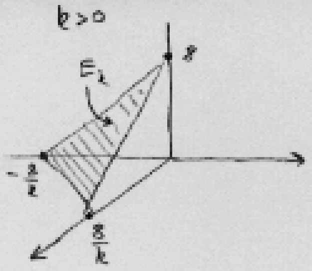
$x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{k} \quad ⚡ k \neq 0 \qquad S_x(\frac{8}{k}|0|0)$

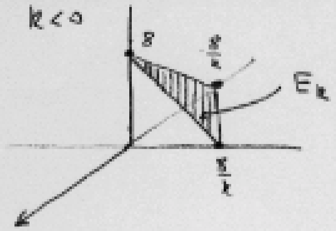
Für $k = 0$ läuft E parallel zur x-y-Ebene durch $z = 8$



AGZ

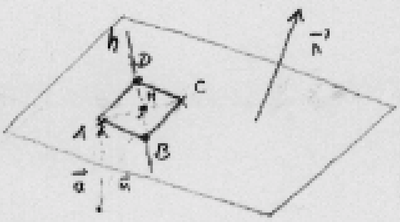
zu 6)





7) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A(5|0|-1)$ $C(-1|6|-1)$

$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{M(2|3|-1)}$



Ein Richtungsvektor $\vec{u}$ von h steht senkrecht auf $\vec{AC}$ und senkrecht auf $\vec{n}$

$g: \vec{x} = \vec{m} + \lambda \cdot \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{u}^* = \vec{n} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} e_x & e_y \\ 2 & 2 \\ -6 & 6 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ -6-0 \\ 12-(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$D \in g$ und $|\vec{DM}| = |\vec{MC}|$ $\vec{MC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\vec{MC}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$\downarrow$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 3+\lambda \\ -1-4\lambda \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \lambda = 1$

$\vec{DM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 3+\lambda \\ -1-4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix}$ $|\vec{DM}| = \sqrt{18\lambda^2}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{b} = \vec{m} - \vec{MD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ D(3|4|5) B(1|2|3)

b) $g: \vec{s}_k = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $g \parallel E \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}_g$

Vorsicht Fehler
$S_k(14+4k|-3-5k|2+2k)$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 10 + 2 = 0$

c) $V_P = \frac{1}{3} G \cdot h$ $|\vec{AB}| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$ $\Rightarrow G = 6^2 = 36$

$h = d\left((14|-3|2) ; E \right)$

AG 3

NF: $\vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - (-1) \end{pmatrix} = 0 \qquad \boxed{2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9 = 0}$

$|\vec{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3 \qquad \boxed{\frac{2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9}{3} = 0}$ HNF

$$d = \frac{2 \cdot 14 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 - 9}{3} = \frac{28 - 6 + 4 - 9}{3} = \frac{17}{3}$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot \frac{17}{3} = 4 \cdot 17 = 68 \text{ (V.E.)}$$

8) a) trivial!

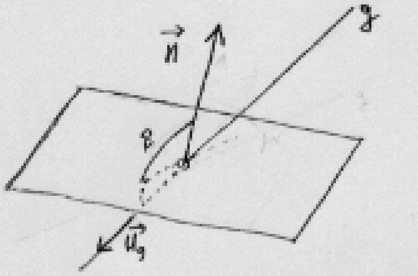
b) $g(A,C)$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10\lambda \\ 4 \end{pmatrix}$

$E_t: \; t x_1 + (7t - 1) x_3 + (4 - 30t) = 0$

$t \cdot 2 + (7t - 1) \cdot 4 + 4 - 30t \overset{?}{=} 0$

$2t + 28t - 4 + 4 - 30t = 0$ ✓

9) $\beta = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{u_g})$

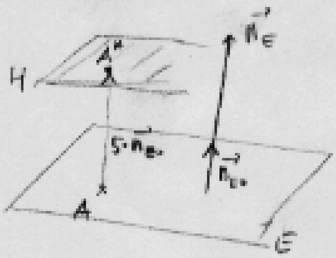


$\vec{n} * \vec{u_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 + (-12) + (-2) = -17$

$\cos\beta = \frac{-17}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{14}} = -0{,}89 \Rightarrow \beta \approx 153° \Rightarrow \alpha = \beta - 90° = 63°$

10) $H \parallel E \Leftrightarrow \vec{n_H} = k \cdot \vec{n_E} \qquad \vec{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n_E}| = \sqrt{26}$

$\vec{n_{E_0}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A(0|0|12) \in E!$



$\vec{a}^* = \vec{a} + 5 \cdot \vec{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} \frac{15}{\sqrt{26}} \\ -\frac{20}{\sqrt{26}} \\ 12 + \frac{5}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$

$H: \; \vec{n_E} * (\vec{x} - \vec{a}^*) = 0$

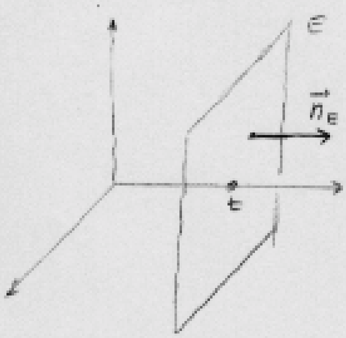
AG 4

11) $E: \; x_2 = t \qquad t \in \mathbb{R}$

$E: \boxed{0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - t = 0}$

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d(O,E) = t \,!$



Probe:

HNF: $\frac{x_2 - t}{1} = 0$

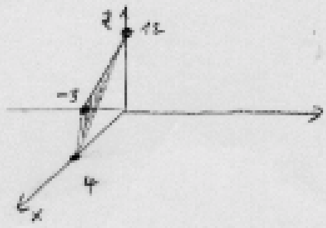
$d(O,E) = \left| \frac{0-t}{t} \right| = |-t| = t$

12) $E: \; 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 12 = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 12 \qquad S_z(0|0|12)$

$x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_2 = -3 \qquad S_y(0|-3|0)$

$x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_1 = 4 \qquad S_x = (4|0|0)$



13) trivial

2.80 Ein idealer Würfel wird 5 mal hintereinander geworfen. Aus den Augenzahlen wird eine fünfstellige Zahl gebildet. Bsp.: 2,4,1,6,6 → 24166

a) Wie viele Zahlen sind möglich ?

Urnenexperiment: Aus einer Urne mit den Zahlen 1,...6 wird mit Zurücklegen ein 4-Tupel gezogen: $N_1 = 6^4$

b) Wie viele Zahlen mit genau 2 mal 4 sind möglich ?

1. Überlegung: Es gibt $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten die 2 Vierer auf 4 Plätze zu verteilen

2. Überlegung: Für die restlichen beiden Ziffern gibt es dann noch 5^2 Möglichkeiten

Also insgesamt:

$$N_2 = \binom{4}{2} \cdot 5^2$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl drei gleiche Ziffern hat ?

Da es sich um ein Laplace-Experiment handelt (Alle 4-Tupel haben die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6^4}$) gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse bei denen E eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

<u>Die Aufgabenstellung ist ungenau!</u>

1. **Fall** Die Zahl hat **genau drei gleiche** Ziffern

-Es gibt 6 Möglichkeiten die Ziffer auszuwählen, die 3 mal vorkommen soll

-Es gibt $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten diese drei gleichen Ziffern auf drei Plätze zu verteilen

-Es gibt 5 Möglichkeiten die 4. Ziffer auszuwählen

Also $P(E_{=3}) = \frac{6 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5}{6^4}$

2. **Fall** Die Zahl hat **mindestens drei gleiche** Ziffern

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier gleiche Ziffern auftreten ist $P(E_{=4}) = \frac{6}{6^4}$

Also $P(E_{>3}) = \frac{6 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5}{6^4} + \frac{6}{6^4}$

	d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl nur gleiche Ziffern hat ? s.o. $P(E_{=4})=\frac{6}{6^4}$
2.81	In einer Urne sind die Zahlen 2,2,2,4,4,5,5,5,6,9,9. Alle Kugeln werden nacheinander gezogen und es wird in der Reihenfolge des Ziehens eine Zahl gebildet. z.B. 29242559469. Wie viele verschiedene Zahlen lassen sich bilden? **Stichwort MISSISSIPPI !** Überlegung: Es gibt $\binom{11}{3}$ Möglichkeiten, die 3 2er auf 11 Plätze zu verteilen. Es gibt $\binom{8}{2}$ Möglichkeiten, die 2 4er auf 8 Plätze zu verteilen. Es gibt $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, die 3 5er auf 6 Plätze zu verteilen. Es gibt $\binom{3}{1}$ Möglichkeiten, die 6 auf 3 Plätze zu verteilen. Es gibt $\binom{2}{2}$ Möglichkeiten, die 2 9er auf 2 Plätze zu verteilen. Also insgesamt: $N=\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}=\frac{11!}{3!8!}\cdot\frac{8!}{2!6!}\cdot\frac{6!}{3!3!}\cdot\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{2!}{2!0!}=\frac{11!}{3!2!3!1!2!}$
2.82	Ein normaler Würfel trägt auf seinen 6 Flächen die Augenzahlen 1,2,3,4,5,6 Ein zweiter Würfel die Augenzahlen 1,1,3,4,6,6 Beide Würfel werden jeweils 2 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Würfel mehr 1en zeigt als der Zweite ? Hier handelt es sich nicht um ein Laplace-Experiment, da nicht alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen z.B. $P(5/1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$ und $P(5/3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ Würfel 1: $P_1(1)=\frac{1}{6}$ $P_1(\bar{1})=\frac{5}{6}$ Würfel 2: $P_2(1)=\frac{1}{3}$ $P_2(\bar{1})=\frac{2}{3}$ 1.Fall der erste Würfel zeigt 1 mal die 1 , der zweite Würfel zeigt 0 mal die 1 $P_{1.Fall}=\left(2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)\right)\bullet\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\approx 0{,}123$

2.Fall der erste Würfel zeigt 2 mal die 1 , der zweite Würfel zeigt 0 mal die 1

$$P_{2.Fall} = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\bullet\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}012$$

3.Fall der erste Würfel zeigt 2 mal die 1 , der zweite Würfel zeigt 1 mal die 1

$$P_{3.Fall} = \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\bullet\left(2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\right) \approx 0.012$$

Insgesamt: $P = P_{1.Fall} + P_{2.Fall} + P_{3.Fall} \approx 0{,}148 \approx 14{,}8\%$

2.83 Zwei Spieler spielen mit den o.g. Würfeln. Spieler I zahlt einen Einsatz von 1 €, Spieler II 1,20 €. Spieler I gewinnt, wenn seine Augenzahl mindestens so hoch ist wie die von B. Wie sieht der Erwartungswert für den Reingewinn von Spieler I aus ? Bei welchem Einsatz von Spieler I ist das Spiel fair ?

Spieler 1 gewinnt, wenn er

- eine 1 würfelt und Spieler 2 eine 1 würfelt $P_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$
- eine 2 würfelt und Spieler 2 eine 1 würfelt $P_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$
- eine 3 würfelt und Spieler 2 eine 1 oder eine 3 würfelt $P_3 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{36}$
- eine 4 würfelt

  und Spieler 2 eine 1 oder eine 3 oder eine 4 würfelt $P_4 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{18}$
- eine 5 würfelt

  und Spieler 2 eine 1 oder eine 3 oder eine 4 würfelt $P_5 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{18}$
- eine 6 würfelt

  unabhängig von dem was Spieler 2 würfelt $P_6 = \frac{1}{6}$

also gewinnt er insgesamt mit der Wahrscheinlichkeit $P = \frac{21}{36}$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn ergibt sich damit:

RG	-1	+1,20
P(X=RG)	$\frac{14}{36}$	$\frac{21}{36}$

$$E(X) = \frac{14}{36}\cdot(-1) + \frac{21}{36}\cdot 1{,}20 = \frac{14}{45} \approx 0{,}31$$

D.h. der Spieler 1 kann mit einem mittleren Gewinn von 0,31 € pro Spiel rechnen.

Damit das Spiel fair ist , muss E(X)=0 gelten:

	$\frac{14}{36}\cdot(-e)+\frac{21}{36}\cdot 1{,}20=0$ $\Rightarrow e=\frac{21}{36}\cdot 1{,}20\cdot\frac{36}{14}=1{,}80$ D.h. Spieler 1 müsste einen Einsatz von 1,80 € zahlen.
2.84	Die Hypothese $p=\frac{1}{3}$ für die Augenzahl 1 beim Würfel I soll getestet werden. Dazu soll der Würfel 1200 mal geworfen werden. Formuliere eine Entscheidungsregel (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95%)
2.85	Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie oft müsste man das mindestens tun, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens ein mal gleichzeitig die 1 erscheint ? n-stufiges Bernoulli-Experiment X: Anzahhl der Erfolge, d.h. (1/1) ist aufgetreten $p=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}\ ;\ q=\frac{17}{18}$ Ansatz: $P(X\geq 1)\geq 0{,}95$ $1-P(X=0)\geq 0{,}95$ $0{,}05\geq P(X=0)$

	$0{,}05 \ge \binom{n}{0} p^0 q^n$ $0{,}05 \ge q^n$ $0{,}05 \ge \left(\frac{17}{18}\right)^n$ $\log 0{,}05 \ge n \cdot \log\left(\frac{17}{18}\right) \quad / : \log\left(\frac{17}{18}\right)$ $\left(\frac{\log 0{,}05}{\log\left(\frac{17}{18}\right)}\right) \le n \qquad / \log\left(\frac{17}{18}\right) < 0$ $53 \le n$ d.h. ich muss mindestens 53 mal einen Doppelwurf machen, damit mit 95%-iger Sicherheit mindestens 1 mal das Ergebnis (1/1) auftritt.
2.86	Bei einem Computer benutzt man ein 10-stelliges Codewort zur Kontrolle. Für jede Stelle kann man jeweils 64 Zeichen auswählen. a) Wie viele mögliche Codeworte sind möglich ? $N_1 = 64^{10} \approx 1{,}15 \cdot 10^{18}$ b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort aus lauter verschiedenen Zeichen besteht? $N_2 = 64 \cdot 63 \cdot 62 \cdots 55 = \frac{64!}{54!} \approx 5{,}5 \cdot 10^{17}$
2.87	