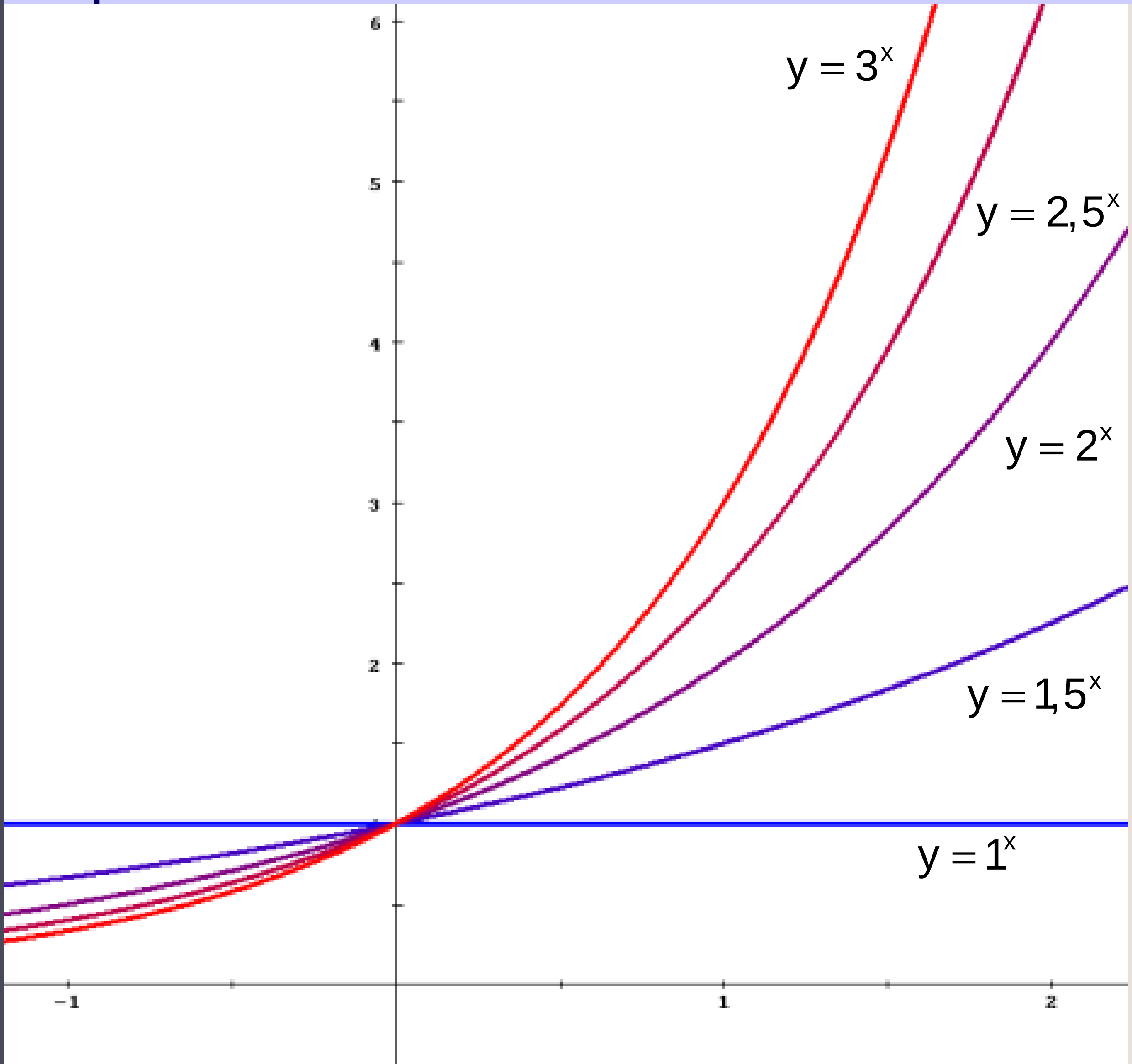
Exponentialfunktionen $f(x) = a^x \;;\; a > 0 \;;\; x \in \mathbb{R}$



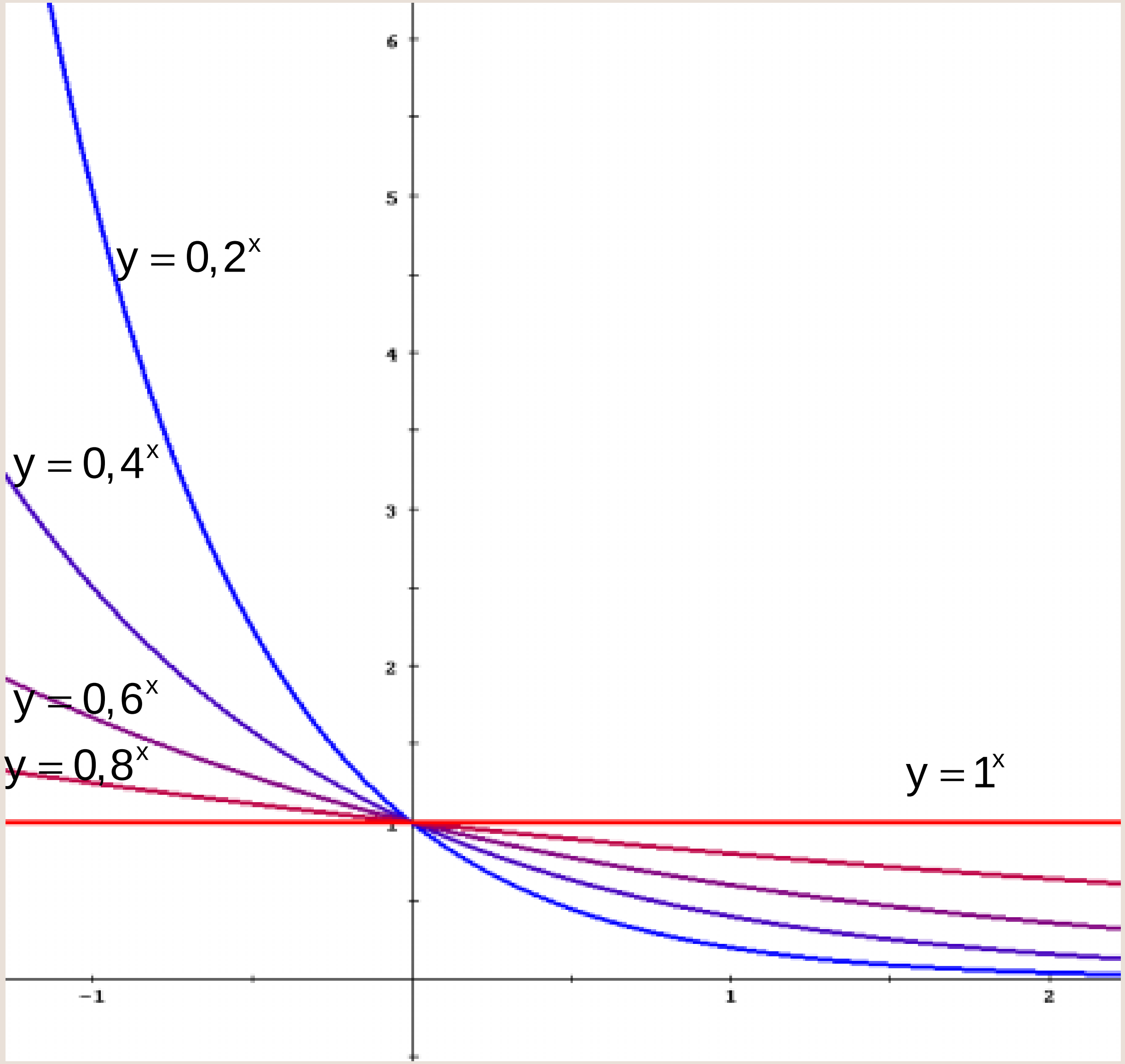
$a > 1:$

f ist streng monoton steigend, also umkehrbar !

f(0)=1

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0+$

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x \;;\; a > 0 \;;\; x \in \mathbb{R}$



$0 < a < 1$:

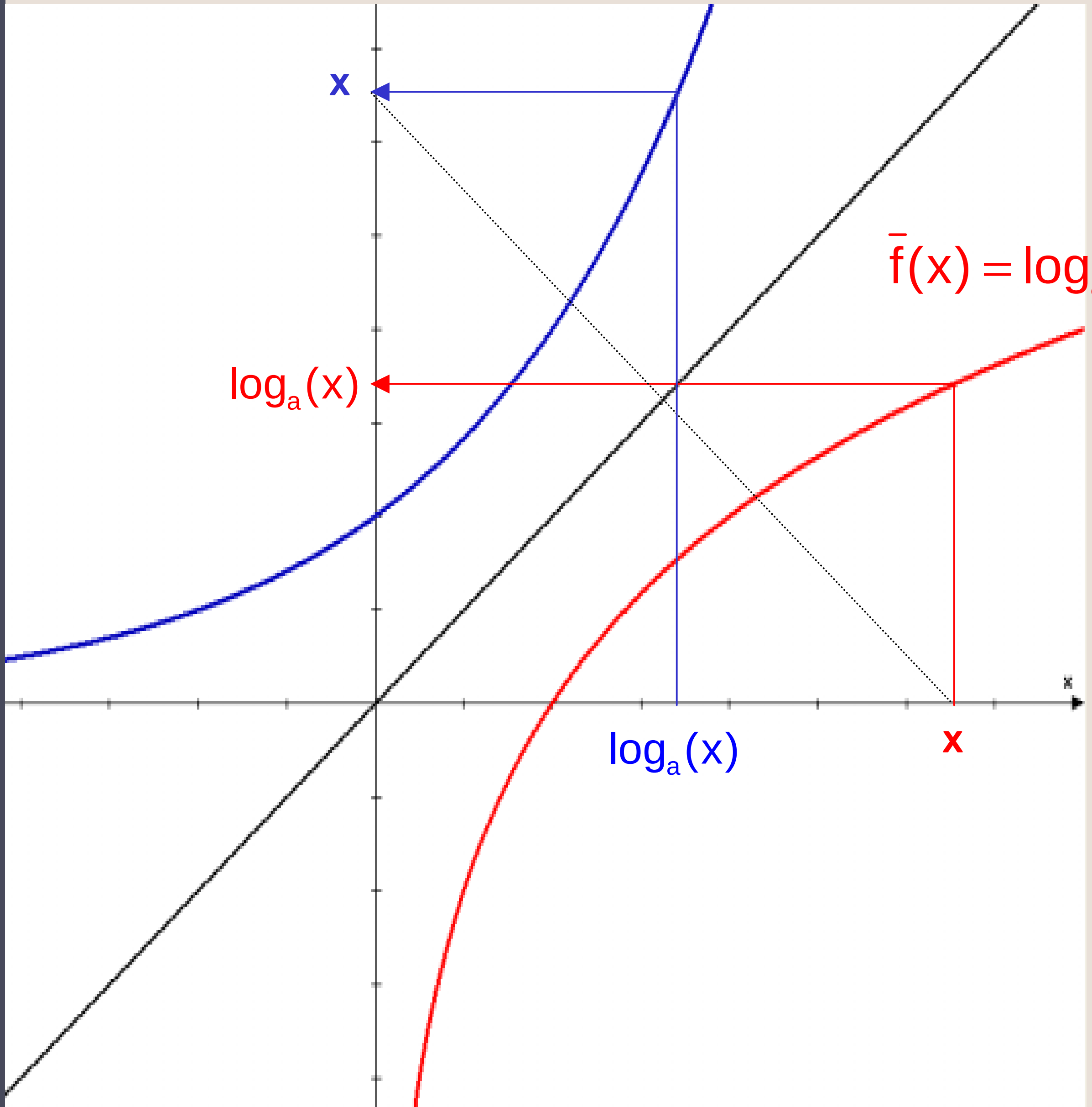
f ist streng monoton fallend, also umkehrbar !

$f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0+$

AniGra

Die Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$; $a > 0$; $a \neq 1$; $x \in \mathbb{R}$



$f(x) = a^x$; $x \in \mathbb{R}$ $a > 0$

$\bar{f}(x) = \log_a(x)$; $x \in \mathbb{R}^+$ $a > 0$ $a \neq 1$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

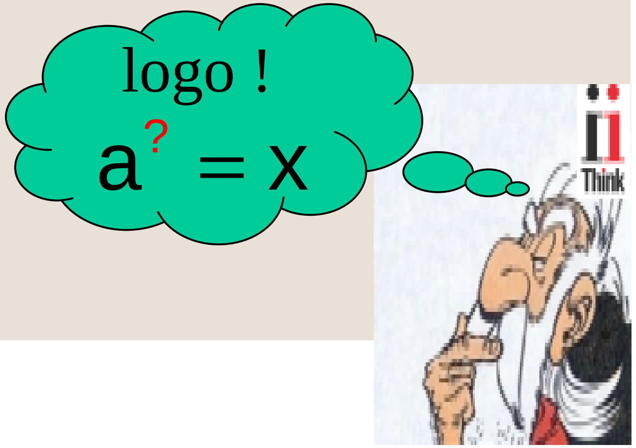
$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a(1) = 0$$

Logarithmen

logos ≙ wort arithmos ≙ zahl

$$a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_a(a^x) = x$$



Merke:

Unter $\log_a(x)$ versteht man diejenige Hochzahl, die man zur Basis a wählen muss, um x zu erhalten.

$\log_2(8) = 3$ weil $2^3 = 8$	$\log_a(1) = 0$ weil $a^0 = 1$
$\log_{10}(0{,}1) = -1$ weil $10^{-1} = 0{,}1$	$\log_2(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{3}$ weil $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
$\log_5(25) = 2$ weil $5^2 = 25$	$\log_{10}(10001) \approx 4$ weil $10^4 \approx 10001$

Logarithmengesetze

$a^{\log_a(x)} = x$

Unter $\log_a(x)$ versteht man diejenige Hochzahl, die man zur Basis a wählen muss, um x zu erhalten.

$$\log_a(a^x) = x$$

Potenzgesetze	Logarithmengesetze
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
$a^x : a^y = a^{x-y}$	$\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$
$\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$	$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a(u)$

$a \in \mathbb{R}^+$ $\qquad$ $u, v \in \mathbb{R}^+$

Beweis der Logarithmengesetze

Sei $x = \log_a(u)$ und $y = \log_a(v)$

$$\Rightarrow \quad u = a^x \qquad v = a^y$$

$$\log(u \cdot v) = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a(a^{x+y}) = x+y$$

$$\boxed{\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)}$$

$$\log(u^v) = \log_a((a^x)^v) = \log_a(a^{x \cdot v}) = v \cdot x$$

$$\boxed{\log(u^v) = v \cdot \log(u)}$$

Der Zehnerlogarithmus

$\log_{10}(x) \triangleq \log x$ LOG

10^x 2nd LOG

Wegen

$z = a^{\log_a(z)}$

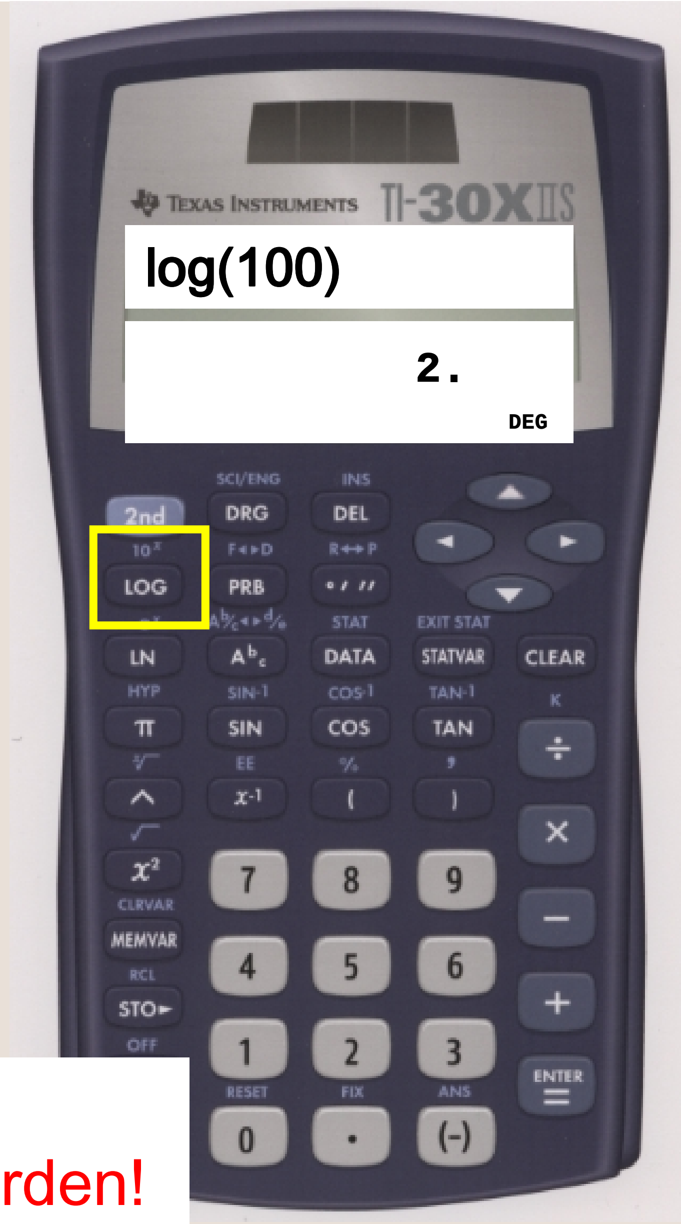
und damit

$\log z = \log\left(a^{\log_a(z)}\right) = \log_a(z) \cdot \log a$

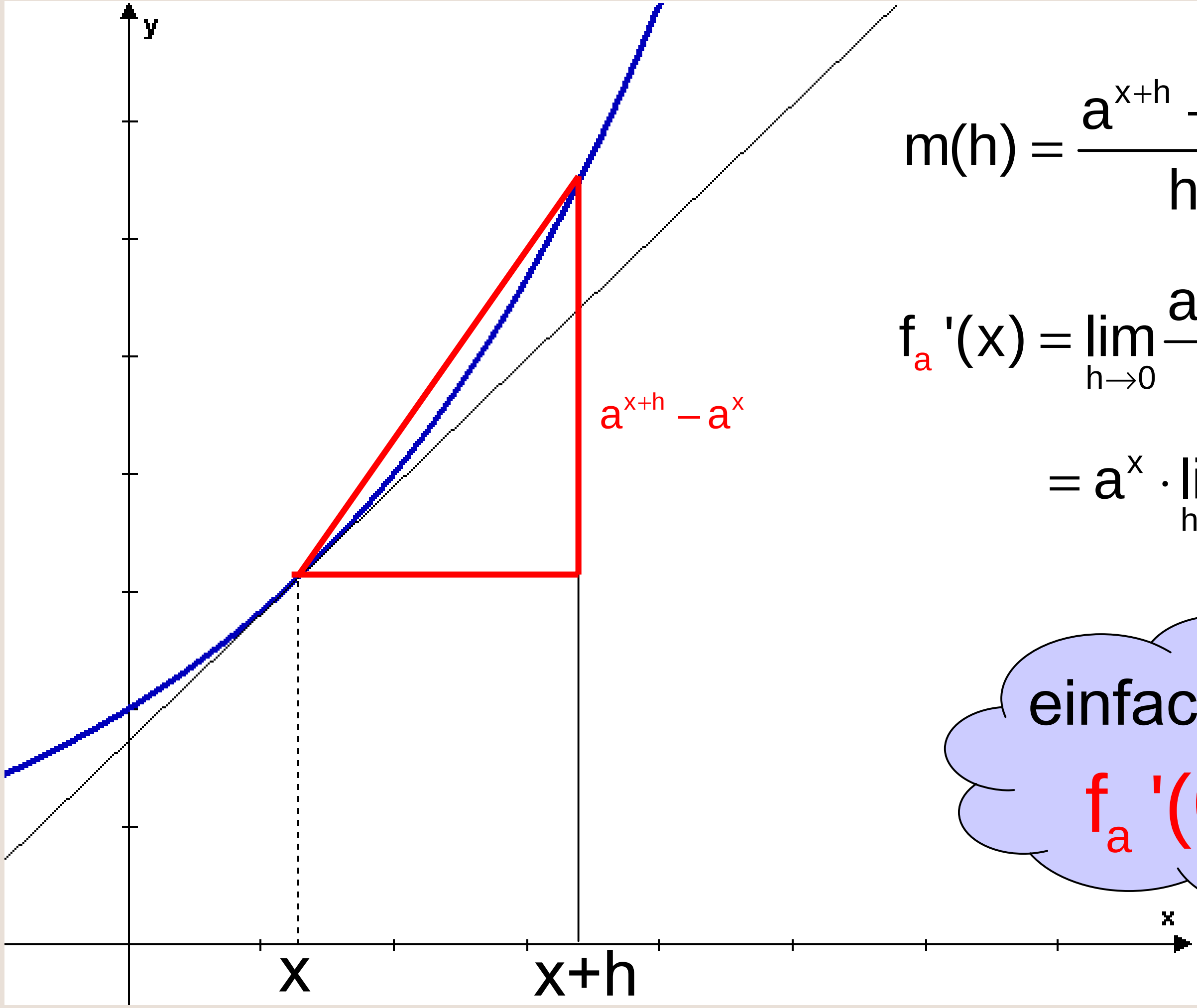
gilt :

$$\log_a(z) = \frac{\log z}{\log a}$$

Alle Logarithmen können durch den Zehnerlogarithmus log ausgedrückt werden!



Die Ableitung von $f_a(x) = a^x \;;\; a > 0 \;;\; a \neq 1 \;;\; x \in \mathbb{R}$



$$m(h) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

$$f_a\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

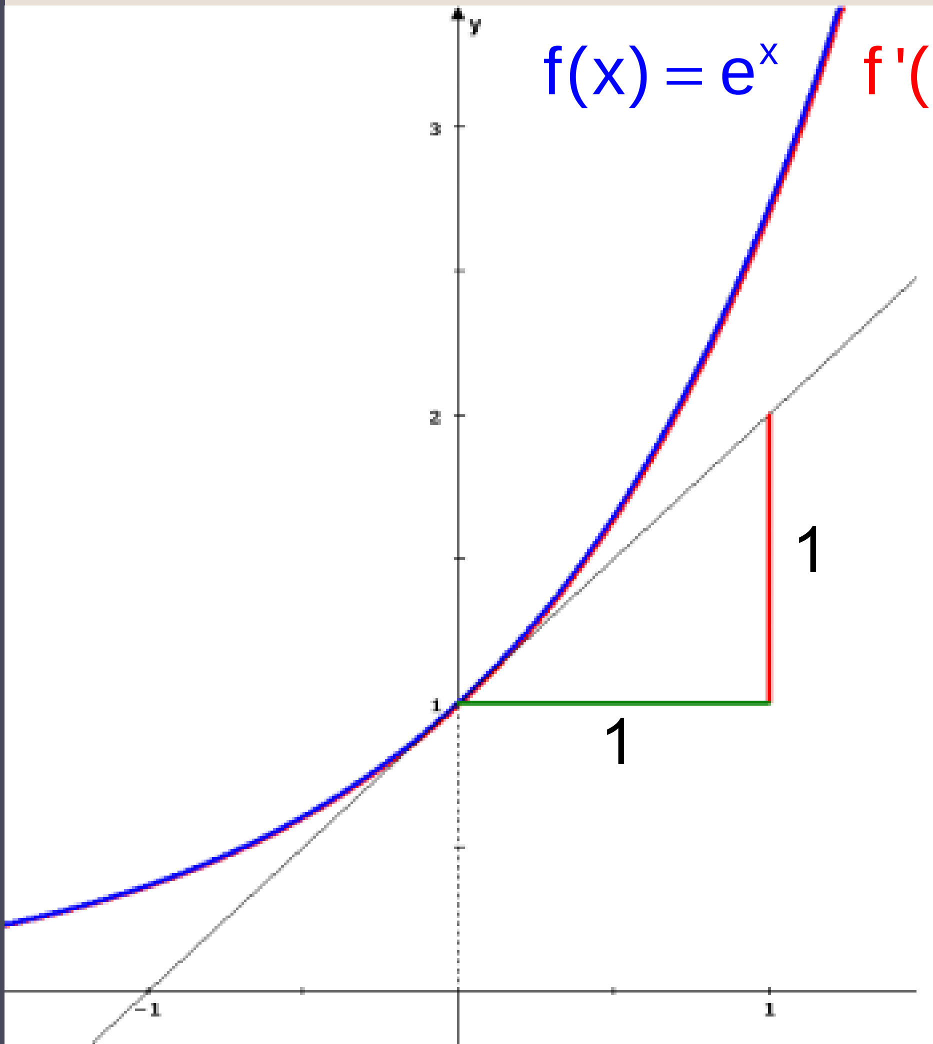
$$= a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = a^x \cdot f_a\,'(0)$$

einfach, wenn….

$$f_a\,'(0) = 1$$

AniGra

Die natürliche Exponentialfunktion



$f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

$f_a'(x) = a^x \cdot f_a'(0)$

Wählt man a so, dass $f_a'(0) = 1$, dann erhält man die natürliche Exponentialfunktion. Diese Basis hat nach L. Euler den Namen e

Einfacher geht‘s nicht !

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x$$

Wie findet man e ?

a so, dass $f_a'(0) = 1$:

Microsoft Excel - Mappe1

C6 = =($A6^C$4-1)/C$4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4		h	0,1	0,01	0,001	0,0001	1E-05	1E-06	1E-07
5	a								
6	2		0,7177	0,6956	0,6934	0,6932	0,6931	0,6931	0,6931
7	2,1		0,7702	0,7447	0,7422	0,742	0,7419	0,7419	0,7419
8	2,2		0,8204	0,7916	0,7888	0,7885	0,7885	0,7885	0,7885
9	2,3		0,8686	0,8364	0,8333	0,8329	0,8329	0,8329	0,8329
10	2,4		0,9149	0,8793	0,8759	0,8755	0,8755	0,8755	0,8755
11	2,5		0,9596	0,9205	0,9167	0,9163	0,9163	0,9163	0,9163
12	2,6		1,0027	0,9601	0,956	0,9556	0,9555	0,9555	0,9555
13	2,7		1,0443	0,9982	0,9937	0,9933	0,9933	0,9933	0,9933
14	2,8		1,0845	1,0349	1,0301	1,0297	1,0296	1,0296	1,0296
15	2,9		1,1235	1,0704	1,0653	1,0648	1,0647	1,0647	1,0647
16	3		1,1612	1,1047	1,0992	1,0987	1,0986	1,0986	1,0986
17	3,1		1,1979	1,1378	1,132	1,1315	1,1314	1,1314	1,1314
18	3,2		1,2335	1,1699	1,1638	1,1632	1,1632	1,1632	1,1632
19	3,3		1,2681	1,2011	1,1946	1,194	1,1939	1,1939	1,1939
20									

Wie findet man e ?

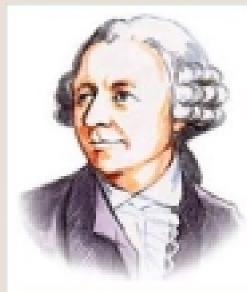
a so, dass $f_a'(0)=1$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4		h	0,1	0,01	0,001	0,0001	1E-05	1E-06	1E-07
5	a								
6	2,71		1,0483	1,0019	0,9974	0,997	0,997	0,9969	0,9969
7	2,711		1,0487	1,0023	0,9978	0,9974	0,9973	0,9973	0,9973
8	2,712		1,0492	1,0027	0,9982	0,9977	0,9977	0,9977	0,9977
9	2,713		1,0496	1,0031	0,9986	0,9981	0,9981	0,9981	0,9981
10	2,714		1,05	1,0034	0,9989	0,9985	0,9984	0,9984	0,9984
11	2,715		1,0504	1,0038	0,9993	0,9988	0,9988	0,9988	0,9988
12	2,716		1,0508	1,0042	0,9997	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992
13	2,717		1,0512	1,0045	1	0,9996	0,9995	0,9995	0,9995
14	2,718		1,0516	1,0049	1,0004	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
15	2,719		1,052	1,0053	1,0008	1,0003	1,0003	1,0003	1,0003
16	2,72		1,0524	1,0057	1,0011	1,0007	1,0006	1,0006	1,0006

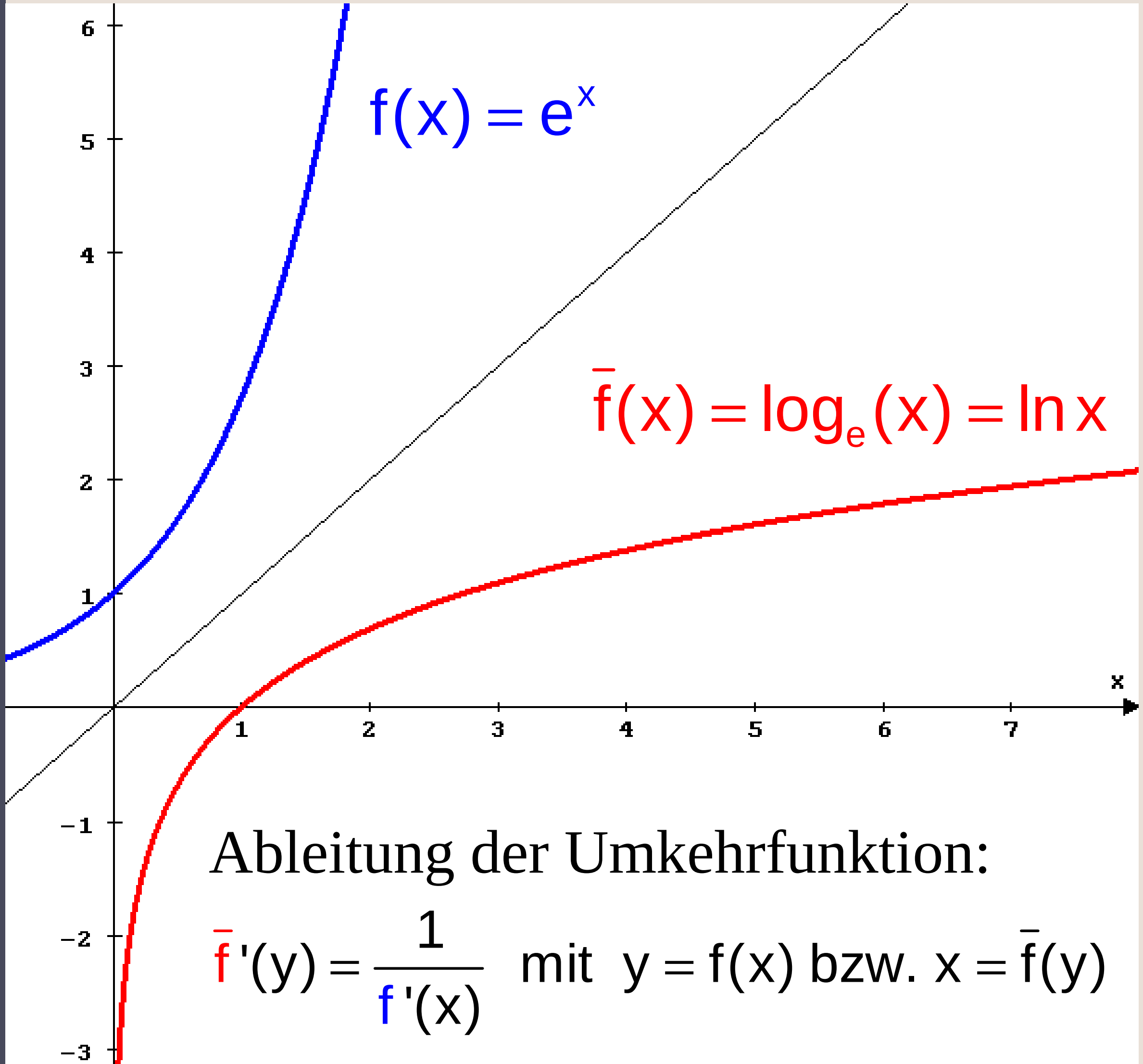
Die natürliche Exponentialfunktion hat die Basis

$$e \approx 2{,}718281828459......$$

Leonard Euler (1707-1783) hat als erster gezeigt, dass e irrational ist.



Die natürliche Logarithmusfunktion- *Logarithmus naturalis*



Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\bar{f}\,'(y) = \frac{1}{f\,'(x)} \quad \text{mit } \; y = f(x) \text{ bzw. } x = \bar{f}(y)$$

$$f(x) = e^x$$

$$f\,'(x) = f\,''(x)$$

$$= \ldots f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\bar{f}(x) = \log_e(x) = \ln x$$

$$\bar{f}\,'(e^x) = \frac{1}{f\,'(x)} = \frac{1}{e^x}$$

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

lnx auf dem Taschenrechner

$\log_e(x) \triangleq \ln x$ LN

e^x 2nd LN

Wegen

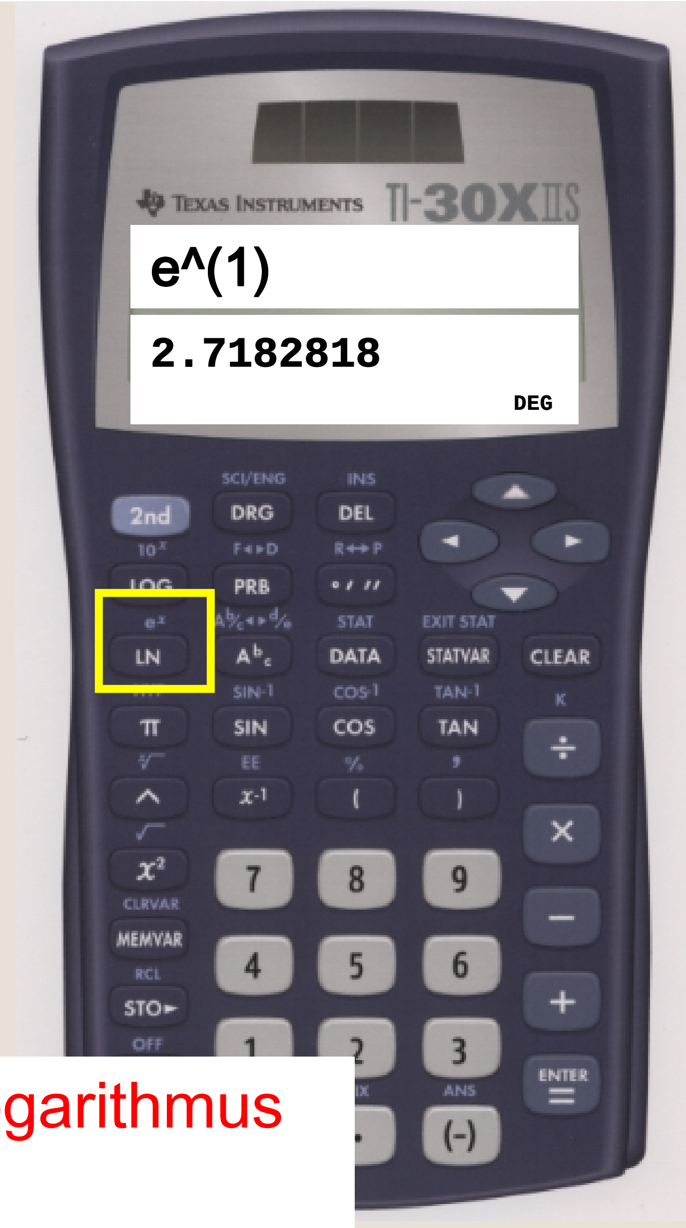
$$z = a^{\log_a(z)}$$

und damit

$$\ln z = \ln\left(a^{\log_a(z)}\right) = \log_a(z) \cdot \ln a$$

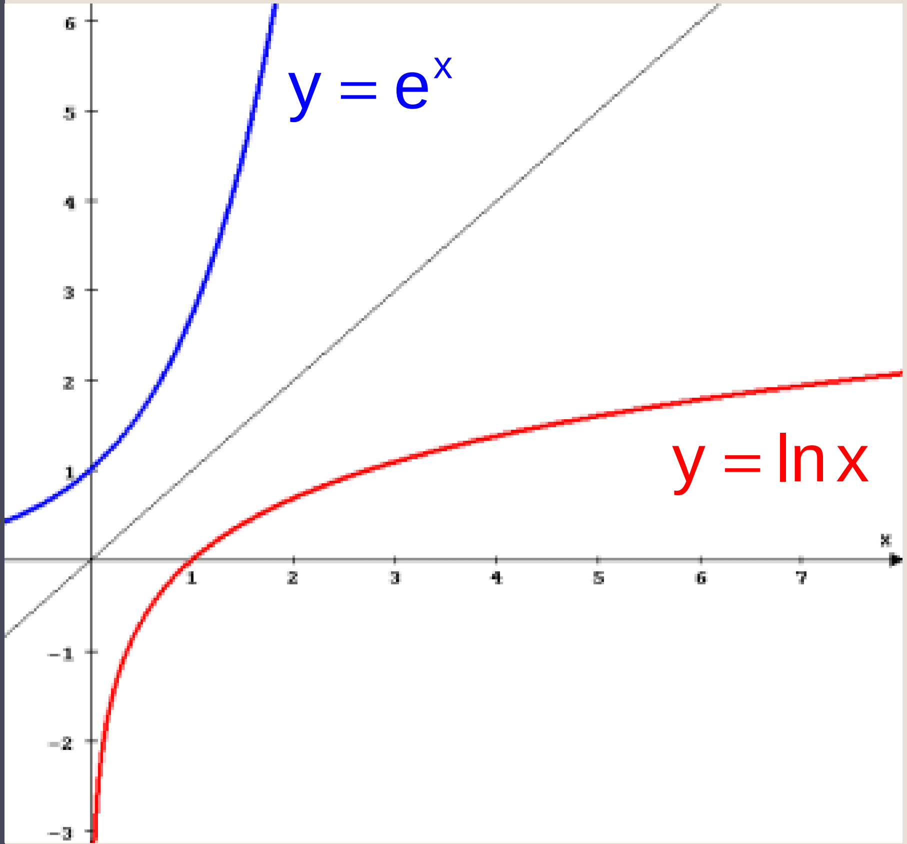
gilt :

$$\log_a(z) = \frac{\ln z}{\ln a}$$



Alle Logarithmen können durch den Logarithmus Naturalis ln ausgedrückt werden!

Die natürliche Logarithmusfunktion- *Logarithmus naturalis*



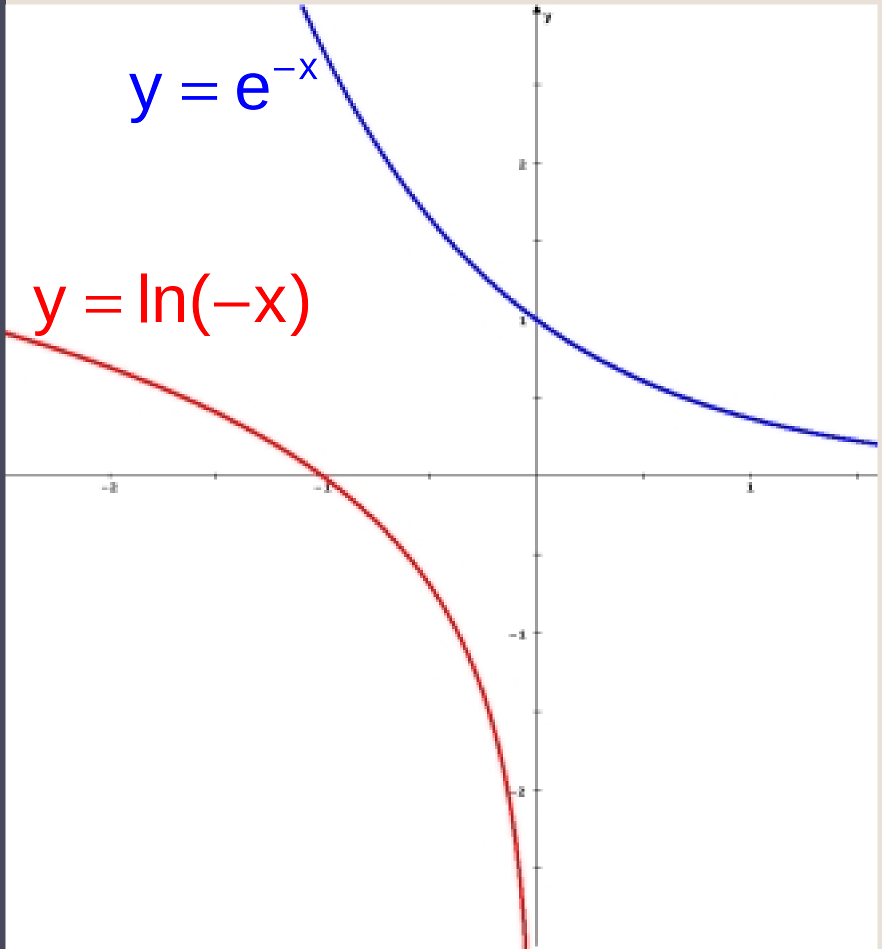
$$(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

Die natürliche Logarithmusfunktion- *Logarithmus naturalis*



$$(e^{-x})' = -e^{-x} \quad x \in \mathbb{R}$$

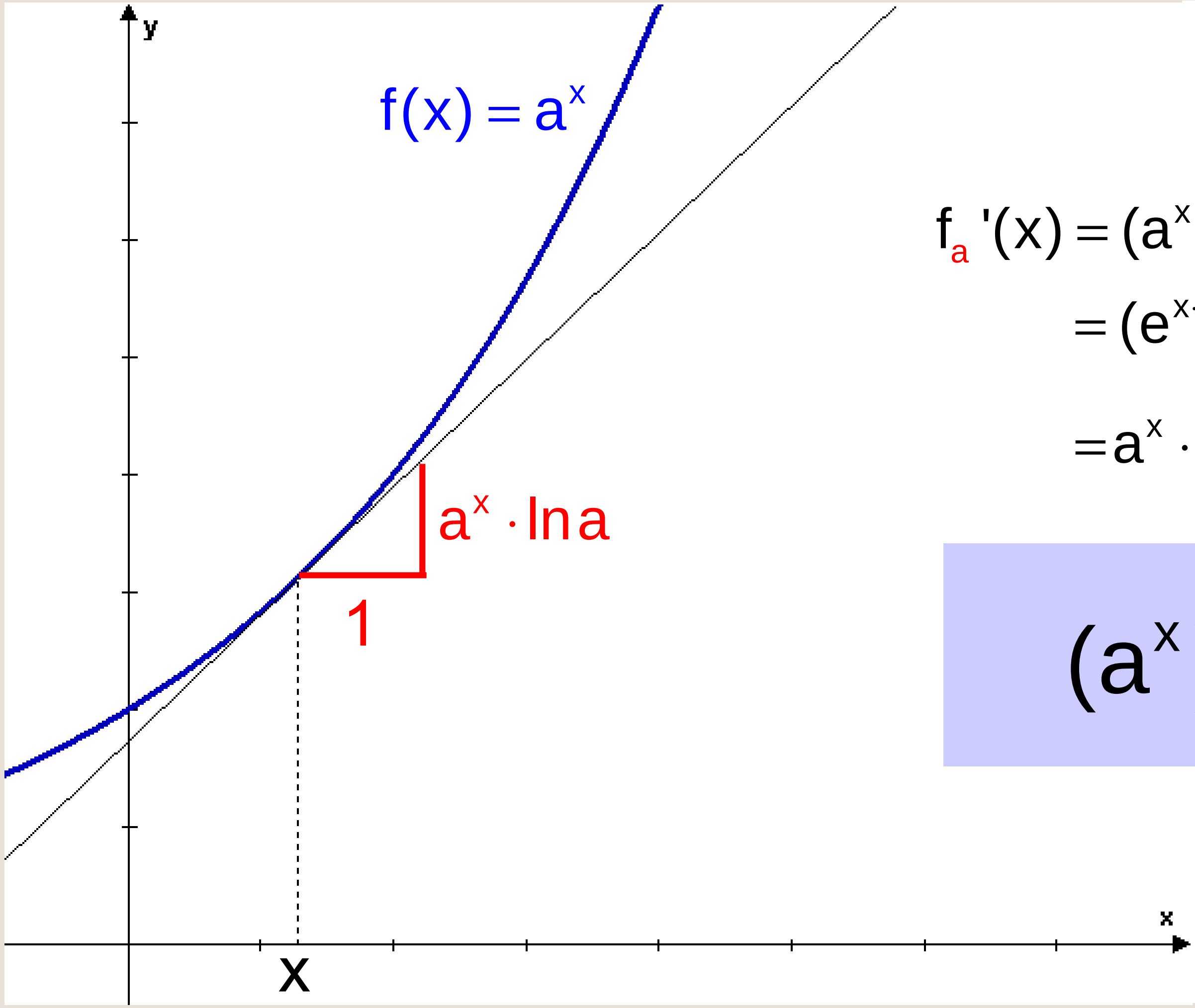
$$\ln'(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^-$$

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c \quad x \in \mathbb{R}^-$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Ableitung von $f_a(x) = a^x \; ; \; a > 0 \; ; \; a \neq 1 ; \; x \in \mathbb{R}$



$$f_a'(x) = (a^x)' = ((e^{\ln a})^x)'$$

$$= (e^{x \cdot \ln a})' \underset{\text{Kettenregel}}{=} e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a$$

$$= a^x \cdot \ln a$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$$

Die Ableitung von $f_a(x) = \log_a(x) \ ; \ a > 0 \ ; \ a \neq 1 ; \ \ x \in \mathbb{R}^+$

$$\bar{f}\,'(y) = \frac{1}{f\,'(x)} \quad \text{mit} \ \ y = f(x) \text{ bzw. } x = \bar{f}(y)$$

$$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{a^{\log_a(x)} \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Eine andere Möglichkeit:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x) \Rightarrow \left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$$

Die Stammfunktion zu ln

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x$$

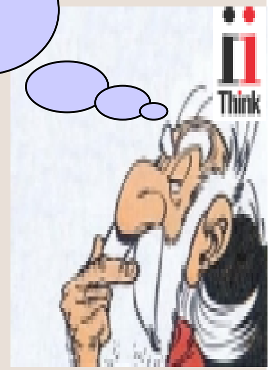
partielle Integration:

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

$$u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$$

$$v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$

Trick merken!



$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln(x) - x + c$$

Integralregel

Ist f eine Funktion mit f(x)>0 für alle $x \in D_f$ so gilt nach der Kettenregel:

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

und damit umgekehrt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + c$$

Beispiel:

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + c \qquad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln(|\sin x|) + c$$