

**Ableitungsregeln:**

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x) \quad \text{bzw.} \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

**Integrationsregeln:**

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad ; \quad \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx + c$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\int f(g(x)) \cdot f'(x) dx = \int f(u) du \quad \text{mit } u = g(x) \text{ und } du = g'(x) dx$$

**Uneigentliche Integrale:**

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \int_{-\infty}^c f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^c f(x) dx$$

**Einfache Grundintegrale:**

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad n \neq -1; c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c \quad ; \quad \int e^x dx = e^x + c \quad ; \quad \int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + c$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c \quad ; \quad k \neq 0 \quad ; \quad \int \ln(kx) dx = \frac{1}{k} \cdot \int \ln(u) du \quad \text{mit } u = kx$$

**Logarithmusfunktion:**  $\ln(x) = \int_1^x \ln(u) du$       $\ln(e) = 1$   
 Umkehrfunktion  $\overline{\ln}(x) = e^x$

**Logarithmengesetze:**  $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$       $e^c \cdot e^d = e^{c+d}$   
 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$       $e^c : e^d = e^{c-d}$   
 $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$       $(e^c)^d = e^{c \cdot d}$

Allgemeine Logarithmusfunktion :  $\log_c(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(c)}$

Spezielles Integral :  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

**Grenzwerte:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{GRF}(x)}{e^x} = 0$$

d.h. die e – Funktion steigt stärker als jede Ganzrationale – Funktion beliebigen Grades

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{GRF}(x) \cdot e^x = 0$$

Entsprechend für die Logarithmusfunktion:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

d.h. die ln-Funktion steigt langsamer als jede Ganzrationale Funktion beliebigen Grades

**Geraden im  $\mathbb{R}^3$**  :  $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

**Ebenen im  $\mathbb{R}^3$**  :  $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$  ;  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$       Parameterform

$E: A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0$  ;  $A_i \in \mathbb{R}$       Koordinatenform

$E: \vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$       Normalenform

$E: \vec{n}_0 * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$  mit  $|\vec{n}_0| = 1$  und  $\vec{n}_0 * \vec{a} > 0$  Hesse Normalenform

Abstand Punkt – Gerade :  $d = |\tilde{d}|$

$\tilde{d} = \vec{n}_0 * (\vec{x} - \vec{p})$     Ist  $\tilde{d} < 0$  dann liegt P bzgl. E auf der gleichen Seite wie der Ursprung 0

Ist  $\tilde{d} > 0$  dann liegt P bzgl. E auf der entgegengesetzten Seite wie der Ursprung 0

**Skalarprodukt** :  $\vec{x} * \vec{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$     bzw.  $\vec{x} * \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$

**Vektorprodukt** :  $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$

$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$

**Determinanten:**  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (gec + hfa + idb)$

**Spatvolumen :** Das Volumen des von den Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  aufgespannten Spats ist

$$V_{\text{Spat}} = \left| (\vec{x} \times \vec{y}) * \vec{z} \right|$$

**Pyramidenvolumen:**

a) „Viereckspyramide“  $V_p = \frac{1}{3} V_{\text{Spat}}$

b) „Dreieckspyramide“  $V_p = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}}$

<p><b>Urnenexperiment</b> In einer Urne sind n unterscheidbare Kugeln, z.B. nummeriert von 1 bis n</p>	<p>Anzahl der Möglichkeiten</p>	<p><b>Realexperiment</b> Wir haben n unterscheidbare Objekte</p>
<p><b>Permutationen</b> Alle n Kugeln werden nacheinander <b>ohne Zurücklegen</b> gezogen. Die Reihenfolge wird notiert.</p>	<p><math>n!</math></p>	<p>Es gibt n! verschiedene Anordnungen (Permutationen) mit n unterscheidbaren Objekten.. Wir bilden also <b>n-Tupel:</b> (     .....       )</p>
<p><b>k-Permutationen-ohne (Variationen)</b> k der n Kugeln (<math>k \leq n</math>) werden nacheinander <b>ohne Zurücklegen</b> gezogen. Die Reihenfolge wird notiert.</p>	<p><math>n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)</math> = <math>\frac{n!}{(n-k)!}</math></p>	<p>Es werden k der n Objekte ausgewählt und diese dann in alle mögliche Reihenfolgen gebracht <b>k-Tupel:</b> (     ...     )</p>
<p><b>k-Permutationen-mit (Variationen)</b> k der n Kugeln (<math>k \leq n</math>) werden nacheinander <b>mit Zurücklegen</b> gezogen. Die Reihenfolge wird notiert.</p>	<p><math>n^k</math></p>	<p>Es werden k der n Objekte mit Zurücklegen ausgewählt und diese dann in alle mögliche Reihenfolgen gebracht <b>k-Tupel:</b> (     ...     )</p>
<p><b>k-Teilmengen (Kombinationen)</b> k der n Kugeln (<math>k \leq n</math>) werden nacheinander <b>ohne Zurücklegen</b> gezogen. Die Reihenfolge</p>	<p><math>\binom{n}{k}</math></p>	<p>Nacheinander werden k Kugeln (ohne Zurücklegen) entnommen, es wird keine Reihenfolge gebildet. <b>k-Teilmengen:</b> { , , ... , }</p>

Binomialkoeffizienten:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$       $0! = 1$       $1! = 1$

**Ereignisse:** Jede Teilmenge der Ergebnismenge S heißt Ereignis E

**Wahrscheinlichkeit von Ereignissen:**

Für **Laplace-Experimente** (Experimente, bei denen jedes mögliche Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt) gilt

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} \quad |x| \text{ bezeichnet dabei die Anzahl der Elemente in der Menge } X$$

Erwartungswert einer Zufallsvariablen X :  $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(X = x_i)$

Varianz einer Zufallsvariablen X :  $V(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$

Standardabweichung:  $\sigma = \sqrt{V(X)}$

**Mehrstufige Zufallsversuche:**

- Pfadregeln:**
- 1.) Bei einem mehrstufigen ZF-Experiment ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades, der zu diesem Ergebnis führt.
  - 2.) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses **E** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu einem Element dieses Ereignisses führen.

Bei einem **n-stufigen Bernoulli-Experiment** gilt für die Zufallsvariable X =Anzahl der Erfolge:

$$P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$   
Misserfolgswahrscheinlichkeit  $q=1-p$

$$\mu = E(X) = n \cdot p \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

**Intervalle für Entscheidungsregeln:** falls  $\sigma \geq 3$

$$90\% \text{ - Regel: } P(\mu - 1,64\sigma < X < \mu + 1,64\sigma) \approx 90\%$$

$$95\% \text{ - Regel: } P(\mu - 1,96\sigma < X < \mu + 1,96\sigma) \approx 95\%$$

$$99\% \text{ - Regel: } P(\mu - 2,58\sigma < X < \mu + 2,58\sigma) \approx 99\%$$

**Kumulierte Wahrscheinlichkeiten:**

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P(X = i)$$

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq (k - 1))$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq (a - 1))$$

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq (k - 1))$$

Speziell :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

### Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

Binomialverteilungen		kumuliert			n=100	
p=	0,1	0,2	0,3	0,35	0,4	0,5
k<=						
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,024	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,058	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,117	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,206	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,321	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,451	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,583	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,703	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,802	0,025	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,876	0,047	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,927	0,080	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,960	0,129	0,000	0,000	0,000	0,000
16	0,979	0,192	0,001	0,000	0,000	0,000
17	0,990	0,271	0,002	0,000	0,000	0,000
18	0,995	0,362	0,005	0,000	0,000	0,000
19	0,998	0,460	0,009	0,000	0,000	0,000
20	0,999	0,559	0,016	0,001	0,000	0,000
21	1,000	0,654	0,029	0,002	0,000	0,000
22	1,000	0,739	0,048	0,003	0,000	0,000
23	1,000	0,811	0,076	0,007	0,000	0,000
24	1,000	0,869	0,114	0,012	0,001	0,000
25	1,000	0,913	0,163	0,021	0,001	0,000
26	1,000	0,944	0,224	0,035	0,002	0,000
27	1,000	0,966	0,296	0,056	0,005	0,000
28	1,000	0,980	0,377	0,085	0,008	0,000
29	1,000	0,989	0,462	0,124	0,015	0,000
30	1,000	0,994	0,549	0,173	0,025	0,000
31	1,000	0,997	0,633	0,233	0,040	0,000
32	1,000	0,998	0,711	0,303	0,062	0,000
33	1,000	0,999	0,779	0,380	0,091	0,000
34	1,000	1,000	0,837	0,462	0,130	0,001
35	1,000	1,000	0,884	0,546	0,179	0,002
36	1,000	1,000	0,920	0,627	0,239	0,003
37	1,000	1,000	0,947	0,702	0,307	0,006
38	1,000	1,000	0,966	0,770	0,382	0,010
39	1,000	1,000	0,979	0,828	0,462	0,018
40	1,000	1,000	0,988	0,875	0,543	0,028
41	1,000	1,000	0,993	0,912	0,623	0,044
42	1,000	1,000	0,996	0,941	0,697	0,067
43	1,000	1,000	0,998	0,961	0,763	0,097
44	1,000	1,000	0,999	0,975	0,821	0,136
45	1,000	1,000	0,999	0,985	0,869	0,184
46	1,000	1,000	1,000	0,991	0,907	0,242

47	1,000	1,000	1,000	0,995	0,936	0,309
48	1,000	1,000	1,000	0,997	0,958	0,382
49	1,000	1,000	1,000	0,999	0,973	0,460
50	1,000	1,000	1,000	0,999	0,983	0,540
51	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	0,618
52	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,691
53	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,758
54	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,816
55	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,864
56	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,903
57	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,933
58	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,956
59	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,972
60	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,982
61	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990
62	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994
63	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997
64	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998
65	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
66	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
67	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
68	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
69	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
70	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
71	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
72	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
73	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
74	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
75	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
76	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
77	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
78	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
79	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
80	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
81	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
82	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
83	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
84	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
85	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
86	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
87	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
88	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
90	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
91	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
92	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
93	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
94	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
95	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
96	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
97	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
98	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
99	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
100	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

