Trainingsaufgabe Analysis 04

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a(x) = (x-1)e^{a-ax} \qquad ; D_{f_a} = \mathbb{R} \ ; \ a \in \mathbb{R}^+$$

1.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, das Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$, die Extempunkte und die Wendepunkte in Abhängigkeit von a.

Zur Kontrolle: $f_a'(x) = (1+a-ax)e^{a-ax}$

$f_a''(x) = a(ax-a-2)e^{a-ax}$

1.2 Alle Extrempunkte des Graphen G_{f_a} liegen auf einer Kurve **E** .

Wie lautet die Funktionsgleichung zu dieser Kurve ?

1.3 Skizzieren Sie mit den Ergebnissen aus 1.1 und 1.2 die Graphen zu f_1 und $f_{0,5}$ in das vorbereitete Koordinatensystem.
Füllen Sie vorher die beiliegende Tabelle mit den charakteristischen Punkten aus.

1.4 Geben Sie die Gleichung der Tangente zu f_1 an der Nullstelle an.

1.5 Zeigen Sie, dass $F_1(x) = -xe^{1-x} + c \ ; \ c \in \mathbb{R}$

eine Stammfunktion zu f_1 ist.

Für den LK: Bestimme die Stammfunktion mit Hilfe partieller Integration

1.6 Der Graph zu $\mathbf{f_1}$,die x-Achse und die y-Achse schließen eine Fläche ein. Bestimmen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

Musterlösung von Jenny Pütz

MUSTERLÖSUNG schriftl. Abitur '01 GK

$f_a(x) = (x-1) \cdot e^{a-ax}$; $D_{f_a} = \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}^+$

1.1 SP mit den Achsen:

x-Achse: (NS) $y = 0$

$0 = (x-1) \cdot e^{a-ax}$

$0 = x-1 \quad \vee \quad 0 = e^{a-ax}$

$\underline{1 = x}$ n. d.!

$S_x(1|0) = \boxed{N(1|0)}$

y-Achse: $x = 0$

$f_a(0) = -1 \cdot e^{a-a\cdot 0}$

$\underline{= -e^a}$

$S_y(0|-e^a)$

Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = (x-1)\cdot e^{a-ax} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} (x-1) = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{a-ax} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = (x-1)\cdot e^{a-ax} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{a-ax} = \infty$

Extremstellen:

$f'(x) = 0$

$f_a'(x) = (x-1)' \cdot (e^{a-ax}) + (x-1) \cdot (e^{a-ax})'$ | Produktregel

$= 1 \cdot e^{a-ax} + (x-1) \cdot (e^{a-ax}) \cdot (-a)$ | Kettenregel

$= e^{a-ax} \cdot (1 + (x-1) \cdot (-a))$

$= e^{a-ax} \cdot (1 - ax + a)$

$0 = e^{a-ax} \cdot (1 - ax + a)$

$0 = e^{a-ax} \quad \vee \quad 0 = 1 - ax + a$

n.a.! $\qquad ax = 1 + a$

$x = \frac{1+a}{a}$

$\underline{x = 1 + \frac{1}{a}}$

$\Rightarrow$ an der Stelle $x = 1 + \frac{1}{a}$ ist eine mögl. ES!

$f_a''(x) = (e^{a-ax})' \cdot (1 - ax + a) + (e^{a-ax}) \cdot (1 - ax + a)'$

$= (e^{a-ax}) \cdot (-a) \cdot (1 - ax + a) + (e^{a-ax}) \cdot (-a)$

$= e^{a-ax} \cdot ((-a) \cdot (1 - ax + a) + (-a))$

$= e^{a-ax} \cdot (-a + a^2x - a^2 - a)$

$= e^{a-ax} \cdot (-2a - a^2 + a^2x)$

$= e^{a-ax} \cdot (-2 - a + ax) \cdot a$

mögl. ES in $f_a''(x)$

$f_a''(1 + \frac{1}{a}) = e^{a - a \cdot (1 + \frac{1}{a})} \cdot (-2 - a + a \cdot (1 + \frac{1}{a})) \cdot a$

$= e^{a - a - 1} \cdot (-2 - a + a + 1) \cdot a$

$= e^{-1} \cdot (-1) \cdot a$

$= -a \cdot \frac{1}{e}$

$= -\frac{a}{e} < 0$

$\Rightarrow$ an der Stelle $x = 1 + \frac{1}{a}$ ist ein Hochpunkt!

ES in $f_a(x)$

$$f_a\left(1+\frac{1}{a}\right) = \left(1+\frac{1}{a}-1\right)\cdot e^{a-a\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right)}$$
$$= \frac{1}{a}\cdot e^{a-a-1}$$
$$= \frac{1}{a}\cdot e^{-1}$$
$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e}$$
$$y = \frac{1}{a\cdot e}$$

$$\Rightarrow \boxed{H\left(1+\frac{1}{a}\;\middle|\;\frac{1}{a\cdot e}\right)}$$

Wendestellen:

$$f_a''(x) = 0$$
$$0 = e^{a-ax}\cdot(-2-a+ax)\cdot a$$
$$0 = e^{a-ax} \quad \vee \quad 0 = -2-a+ax \quad \vee \quad 0 = a$$
$$\text{n.d.!} \qquad 2+a = ax \qquad \text{n.d.!}$$
$$\frac{2+a}{a} = x$$
$$x = 1+\frac{2}{a}$$

$\Rightarrow$ an der Stelle $x = 1+\frac{2}{a}$ ist eine mögl. WS!

mögl. WS in $f_a'''(x)$ oder VZ-Wechsel

1. $f_a'''(x) = (e^{a-ax})'\cdot(-2a-a^2+a^2x) + (e^{a-ax})\cdot(-2a-a^2+a^2x)'$
$$= (e^{a-ax})\cdot(-a)\cdot(-2a-a^2+a^2x) + (e^{a-ax})\cdot(a^2)$$
$$= e^{a-ax}\cdot(-a\cdot(-2a-a^2+a^2x) + a^2)$$
$$= e^{a-ax}\cdot(2a^2+a^3-a^3x+a^2)$$
$$= e^{a-ax}\cdot(3a^2+a^3-a^3x)$$
$$= e^{a-ax}\cdot(3+a-ax)\cdot a^2$$

$$f_a'''\left(1+\frac{2}{a}\right) = e^{a-a\cdot\left(1+\frac{2}{a}\right)}\cdot\left(3+a-a\cdot\left(1+\frac{2}{a}\right)\right)\cdot a^2$$
$$= e^{a-a-2}\cdot(3+a-a-2)\cdot a^2$$
$$= e^{-2}\cdot 1\cdot a^2$$

$= \frac{1}{e^2} \cdot a^2$

$= \frac{a^2}{e^2} = \left(\frac{a}{e}\right)^2 > 0$

$\Rightarrow$ an der Stelle $x = 1 + \frac{2}{a}$ befindet sich eine WS!

2. VZW:

$x > 1 + \frac{2}{a} \rightarrow x = 1 + \frac{2}{a} + \varepsilon$

$x < 1 + \frac{2}{a} \rightarrow x = 1 + \frac{2}{a} - \varepsilon$

$f_a''\left(1 + \frac{2}{a} + \varepsilon\right) = \underbrace{e^{a - a\cdot\left(1 + \frac{2}{a} + \varepsilon\right)}}_{>0} \cdot \left(-2 - a + a \cdot \left(1 + \frac{2}{a} + \varepsilon\right)\right) \cdot \underbrace{a}_{a>0}$

$\Downarrow$ $-2 - a + a + 2 + \varepsilon$ $\Downarrow$ $\underbrace{+\varepsilon}_{>0}$

$f_a''\left(1 + \frac{2}{a} + \varepsilon\right) > 0$

$f_a''\left(1 + \frac{2}{a} - \varepsilon\right) = \underbrace{e^{a - a\cdot\left(1 + \frac{2}{a} - \varepsilon\right)}}_{>0} \cdot \left(-2 - a + a \cdot \left(1 + \frac{2}{a} - \varepsilon\right)\right) \cdot \underbrace{a}_{>0}$

$\Downarrow$ $-2 - a + a + 2 - \varepsilon$ $\Downarrow$ $\underbrace{-\varepsilon}_{<0}$

$f_a''\left(1 + \frac{2}{a} + \varepsilon\right) < 0$

$\Rightarrow$ an der Stelle $x = 1 + \frac{2}{a}$ ist ein VZW; d.h. an der Stelle befindet sich eine WS!

WS in $f_a(x)$:

$f_a\left(1 + \frac{2}{a}\right) = \left(1 + \frac{2}{a} - 1\right) \cdot e^{a - a\cdot\left(1 + \frac{2}{a}\right)}$

$= \frac{2}{a} \cdot e^{a - a - 2}$

$= \frac{2}{a} \cdot e^{-2}$

$= \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{e^2}$

$\underline{y = \frac{2}{a e^2}}$

$\Rightarrow \boxed{W\left(1 + \frac{2}{a} \,\middle|\, \frac{2}{a \cdot e^2}\right)}$

1.3

für f_1:

$N(1|0)$

$S_y(0|-e)$

$\lim\limits_{x \to \infty} f_1(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$

$H(2|\frac{1}{e})$

$W(3|\frac{2}{e^2})$

$f_{Gra}(x) = \frac{1}{e} \cdot x - \frac{1}{e}$

für $f_{0,5}$:

$N(1|0)$

$S_y(0|-\sqrt{e})$

$\lim\limits_{x \to \infty} f_{0,5}(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_{0,5}(x) = -\infty$

$H(3|\frac{2}{e})$

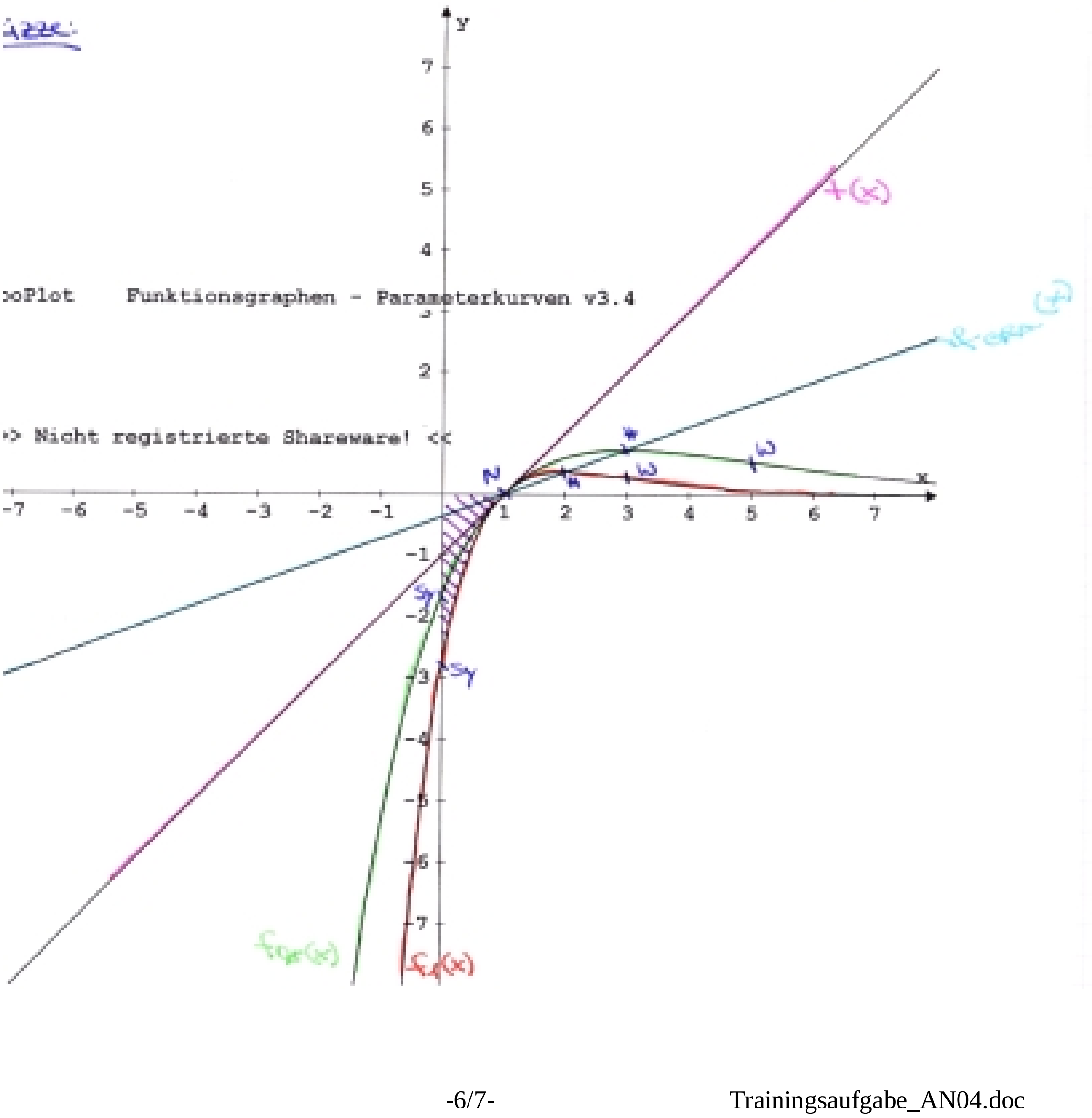
$W(5|\frac{4}{e^2})$

$f_{Gra}(x) = \frac{1}{e} \cdot x - \frac{1}{e}$

$t(x) = x - 1$

/// = I

Skizze:



1.4.

Fkt - Gl. d. Tangente zu $f_1(x) = 0$:

$t(x) = m \cdot x + b$

$N(1|0)$ ↓ ↓ x y

$f_1(x) = (x-1) \cdot e^{1-x}$

$f_1'(x) = (2-x) \cdot e^{1-x}$

$f_1'(1) = 1 \cdot e^{1-1} = e^0 = 1$

$\Rightarrow \underline{m = 1}$

x, y, m in $t(x)$; nach b auflösen:

$0 = 1 \cdot 1 + b$

$0 = 1 + b \quad | -1$

$\underline{-1 = b}$

$\Rightarrow \boxed{t(x) = x - 1}$

1.5

$F_1(x) = -x \cdot e^{1-x} + c$

$f_1(x) = (x-1) \cdot e^{1-x}$

$\Big\} \; F_1'(x) = f_1(x)$

$F_1'(x) = (-x)' \cdot (e^{1-x}) + (-x) \cdot (e^{1-x})' + c'$

$= -1 \cdot e^{1-x} + (-x) \cdot (e^{1-x}) \cdot (-1)$

$= e^{1-x} \cdot (-1 + (-x) \cdot (-1))$

$= e^{1-x} \cdot (-1 + x)$

$= (x-1) \cdot e^{1-x} = f_1(x)$

1.6

Maßzahl d. Fläche zw. x-Achse, y-Achse und f_1:

$f_1(x) = (x-1) \cdot e^{1-x}$ $\quad N(1|0)$

$I = \int_0^1 (x-1) \cdot e^{1-x} \, dx =$

$= \left[-x \cdot e^{1-x} + c\right]_0^1 \quad | \; F_1(1) - F_1(0)$

$= (-1 \cdot e^{1-1} + c) - (-0 \cdot e^{1-0} + c)$

$= (-e^0 + c) - (c)$

$= -e^0 + c - c$

$= -e^0$

$\underline{I = -1}$

$\Rightarrow$ das Integral d. Fläche ist -1, liegt also unterhalb d. x-Achse!

Maßzahl = Betrag d. Integrals

$\underline{|-1| = 1}$

$\Rightarrow$ die Maßzahl d. Fläche ist 1!