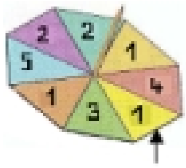
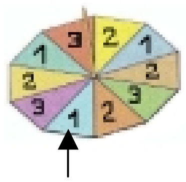
Aufgabe 3 Stochastik

Die Glückskreisel I und II werden gedreht. Sie bleiben dabei jeweils auf einer Kante liegen. Die dort notierte Zahl gilt jeweils als „geworfen" . Die Glückskreisel können hier als ideale 8- bzw. 10-ecke angesehen werden.

3.1 **Der Glückskreisel I wird jetzt 5 Mal gedreht. Das Ergebnis dieses 5-stufigen Zufallsexperiments wird als 5-stellige Zahl notiert.**

3.1.1 Wie viele verschiedene Zahlen können dabei auftreten ?
3.1.2 Wie viele Zahlen mit mindestens vier gleichen Ziffern sind möglich ?
3.1.3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt eine Zahl mit fünf verschiedenen Ziffern auf ?
~~3.1.4 Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt eine gerade Zahl auf?~~

3.2 **Es werden nun beide Kreisel gleichzeitig gedreht, bis zwei gleiche Zahlen auftreten, höchstens jedoch 4 mal. Die Zufallsvariable Y ist hier „die Anzahl der benötigten Würfe, bis zwei gleiche Ziffern erscheinen, oder 4 Würfe getätigt wurden."**

3.2.1 Stellen Sie die Ergebnisse dieses Zufallsexperiments mit allen Wahrscheinlichkeiten an einem Baumdiagramm dar.
3.2.2 Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ?
3.2.3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit benötigt man mindestens drei Würfe ?
3.2.4 Wie groß ist der Erwartungswert E(Y) ?

3.3 **Ein Spiel besteht in einem einmaligen Doppelwurf mit den beiden Kreiseln. Der Einsatz beträgt 2€.
Gewonnen hat man, wenn beide Kreisel die gleiche Augenzahl zeigen. In diesem Fall erhält man 5€ ausgezahlt.**

3.3.1 Wie lautet die Verteilungsfunktion für den Reingewinn G ? (Reingewinn = Gewinn – Einsatz)
3.3.2 Welcher Reingewinn ist pro Spiel zu erwarten ?
3.3.3 Wie hoch müsste der Einsatz sein, damit der Anbieter des Spiels im Mittel mit einem Gewinn von 0,50€ rechnen kann ?
3.3.4 Wie oft müsste man mindestens spielen um mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal einen positiven Reingewinn zu erzielen?

3.4 Der Kreisel II wird jetzt 100 mal betätigt.
3.4.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dabei genau 33 mal die Ziffer 1 auf ?
3.4.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die Ziffer 1 mindestens 29 mal und höchstens 33 mal auf ?

3.5 Jetzt will man überprüfen, ob für diesen Kreisel die Hypothese p=0,4 für das Auftreten der Augenzahl 2 zutrifft. Dazu wird wieder 100 mal gedreht.
3.5.1 Wie lautet eine Entscheidungsregel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% ?
3.5.2 Beurteilen Sie das Ergebnis : Es tritt 48 mal die Ziffer 2 auf.

3.5.3 Wie wäre das Ergebnis „Die Ziffer 2 tritt 30 mal auf“ zu beurteilen ?

Aufgabe 3 Schriftliche Abiturprüfung 2007 Stochastik

Lösungsskizze

3.1 Kreisel I

x	1	2	3	4	5
P(X=k)	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Kreisel II

y	1	2	3
P(Y=k)	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

3.1.1 $S = \{(1|1|1|1|1)....(5|5|5|5|5)\}$ $\#S = 5^5 = 3125$

3.1.2 a) genau 4 gleiche Ziffern

-5 Möglichkeiten die Ziffer für die 4 gleichen auszuwählen

- $\binom{5}{4} = 5$ Möglichkeiten diese 4 gleichen Ziffern auf 5 Plätze zu verteilen.
- 4 Möglichkeiten die restliche Zahl auszuwählen
- 1 Möglichkeit, diese Zahl auf einen Platz zu setzen

$\Rightarrow N_4 = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 100$

b) genau 5 gleiche Ziffern

-5 Möglichkeiten die Ziffer für die 5 gleichen auszuwählen und auf die 5 Plätze zu setzen.

$\Rightarrow N_5 = 5$

$\Rightarrow N_{4,5} = 100 + 5 = 105$

Also insgesamt N=105 Zahlen mit mindestens 4 gleichen Ziffern.

3.1.3 Die Wahrscheinlichkeit für irgendeine Zahl mit 5 versch. Ziffern ist nach der Pfadregel $P = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{32768}$

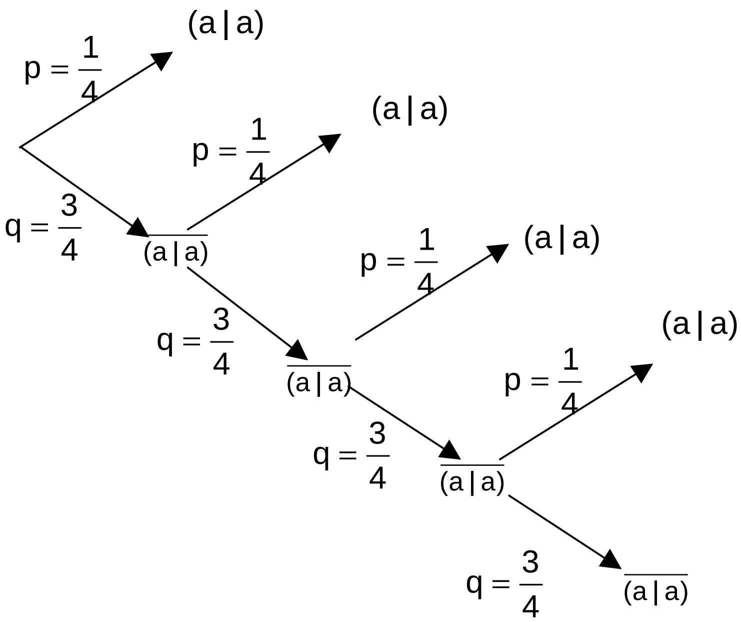
Da es insgesamt 5!=120 verschiedene Zahlen mit 5 versch. Ziffern gibt, ist

$P(\text{Zahl hat 5 verschiedene Ziffern}) = 120 \cdot \frac{6}{32768} \approx 2{,}2\%$

3.1.5 P(Zahl ist gerade)=
sehr schwierig

3.2.1 Z = Anz. der Würfe bis Spielende

Erfolg: gleiche Augenzahl $P(a|a)=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{10}=\frac{20}{80}=\frac{1}{4}$



3.2.2

k	1	2	3	4
P(Z=k)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^4$
	25%	18,75%	14%	42,19%

3.2.3 $P(Z\leq 3)=P(Z=1)+P(Z=2)+P(Z=3)\approx 57{,}8\%$

3.2.4 E(Y)= $\sum k \cdot P(Y=k) \approx 2{,}7$

3.3.1 W: Ergebnis des Doppelwurfs G : Reingewinn

W	(1|1)	(2|2)	(3|3)	sonst
P(W)	$\frac{9}{80}$	$\frac{8}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{60}{80}$

k	-2	3
P(G=k)	$\frac{60}{80}$	$\frac{20}{80}$

3.3.2 E(G)= $\sum k \cdot P(G=k) = -\frac{6}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$

Pro Spiel verliert man im Mittel $0{,}75€$

3.3.3 Der Einsatz müsste dann 1,75 € betragen

3.3.4 X: Anzahl der Spiele mit erzieltem Reingewinn

n-stufiges Bernoulli-Experiment ; Erfolg: Spiel mit Reingewinn

$p=\frac{1}{4}$ $q=\frac{3}{4}$ $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$

$$1-P(X=0) \geq 0{,}95$$
$$1-0{,}95 \geq P(X=0)$$
$$0{,}05 \geq \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$0{,}05 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad |\log$$
$$\log 0{,}05 \geq n \cdot \log\frac{3}{4} \quad |:\log\frac{3}{4}$$

Vorsicht : $\log\frac{3}{4} < 0$

$$\frac{\log 0{,}05}{\log\frac{3}{4}} \leq n$$

$$10{,}4.. \le n$$

Man muss also mindestens 11 mal spielen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal einen positiven Reingewinn erzielt.

3.4 n=100 Erfolg: man würfelt eine 1 p=0,3 q=0,7

X: gewürfelte Augenzahl

3.4.1 $P(X=33)=\binom{100}{33}\cdot 0{,}3^{33}\cdot 0{,}7^{67}\approx$ 0,779-0,711=0,068

aus Tabelle abgelesen.

Binomialverteilungen				kumuliert		n= 100	
p=	0,1	0,2	0,25	0,3	0,33	0,4	0,5
k<=							
28	1,000	0,980	0,792	0,377	0,170	0,008	0,000
29	1,000	0,989	0,850	0,462	0,230	0,015	0,000
30	1,000	0,994	0,896	0,549	0,301	0,025	0,000
31	1,000	0,997	0,931	0,633	0,379	0,040	0,000
32	1,000	0,998	0,955	0,711	0,462	0,062	0,000
33	1,000	0,999	0,972	0,779	0,547	0,091	0,000
34	1,000	1,000	0,984	0,837	0,629	0,130	0,001
35	1,000	1,000	0,991	0,884	0,705	0,179	0,002

3.4.2 $P(29\le X\le 33)=P(X\le 33)-P(X\le 24)$

=0,779-0,377 =0,402=40,2%

3.5 Nullhypothese H_0 : $p=0{,}4$ für das Auftreten der 2

n=100 $p=0{,}4$ Erfolg: 2 ist aufgetreten $q=0{,}6$

X: Anzahl der Erfolge (Anzahl der 2er)

$E(X)=np=40 \qquad \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{24}\approx 4{,}9 \quad >3$

$1{,}96\cdot\sigma\approx 9{,}6 \qquad U_{95\%}=[31;49]_{\mathbb{N}}$

3.5.1 Ich verwerfe die Hypothese falls weniger als 31 mal oder mehr als 49 mal die 2 auftritt.

3.5.2 Die Hypothese H_0 wird also nicht verworfen (d.h. sie wird beibehalten), weil $48\in[31;49]_{\mathbb{N}}$ (Irrtumswahrscheinlichkeit 5%)

Das heißt aber nicht, dass die Hypothese H_0 richtig ist. Das Ergebnis ist z.B. auch verträglich mit der Hypothese H_1: p=0,44

$E(X)=np=44 \qquad \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{24{,}6}\approx 4{,}96$

$U_{95\%}=[35;53]_{\mathbb{N}} \qquad 48\in[35;53]_{\mathbb{N}}$

3.5.3 $30\notin[31;49]_{\mathbb{N}}$ d.h. ich verwerfe die Hypothese. Ich bin mir bewusst, dass ich dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% habe. Auch bei p=0,4 kommen in 5% der Fälle Ergebnisse außerhalb der 95%-Umgebung vor. In diesem Fall würde ich die Hypothese zu unrecht verwerfen.