Trainingsaufgabe Analysis 03

Gegeben sind sie hyperbolischen Funktionen **sinh** („Sinus hyperbolicus“) , **cosh** („Cosinus hyperbolicus“) und **tanh** („ Tangens hyperbolicus“) mit folgender Definition:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

3.1 Zeige a) sinh‘(x) = cosh(x) b) cosh‘(x) = sinh(x) c)

3.2 Untersuche die Funktion $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

a) Untersuche die Funktion auf Symmetrie

b) Bestimme die Nullstellen der Funktion

c) Untersuche die Funktion auf Monotonie, Extremstellen und Wendestellen

d) Untersuche das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$

e) Skizziere mit den bisherigen Angaben den Graphen zu **tanh**

f) Begründe, warum **tanh** eine Umkehrfunktion **artanh** besitzt und bestimme den Definitionsbereich von **artanh** („area tangens hyperbolicus“)

g) Bestimme die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion **artanh**

Hinweis: $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ zurKontrolle: $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

und leite die Funktion artanh ab .

h) Bestimme eine Stammfunktion zu **tanh**

Hinweis: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) + c \quad ; f(x) > 0$

i) Zeige durch Ableiten, $H(x) = x \cdot \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \cdot \ln(1-x^2) \ ; \ x \in \left]-1;1\right[$ dass

eine Stammfunktion zu **artanh** ist.