Pythagoras

Ausschnitt aus
„Die Schule von Athen“
Raffael 1510

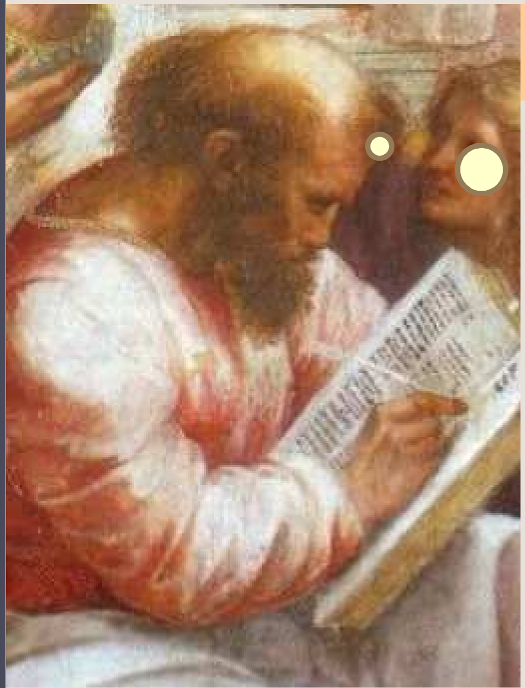
Πυθαγόρας * um 570 v. Chr † um 500 v. Chr

Mathematiker und Naturphilosoph

-gründete 531v.Chr die religiös-politische Lebensgemeinschaft der Pythagoreer. Anhänger: u.a. Philolaos, Euklid und Ptolemäus

„Die Zahl ist das Wesen aller Dinge“

Pythagoras

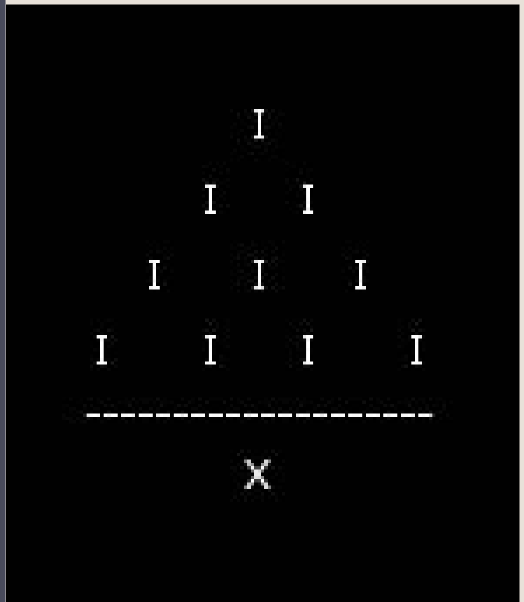


„Die Zahl ist das Wesen aller Dinge“

Verstehst du die Zahlen, dann verstehst du die Welt!

Für die Pythagoreer, gehörten die Musik, die Harmonie und die Zahlen untrennbar zusammen.

Die Tetraktys (Vierzahl) und Geometrie

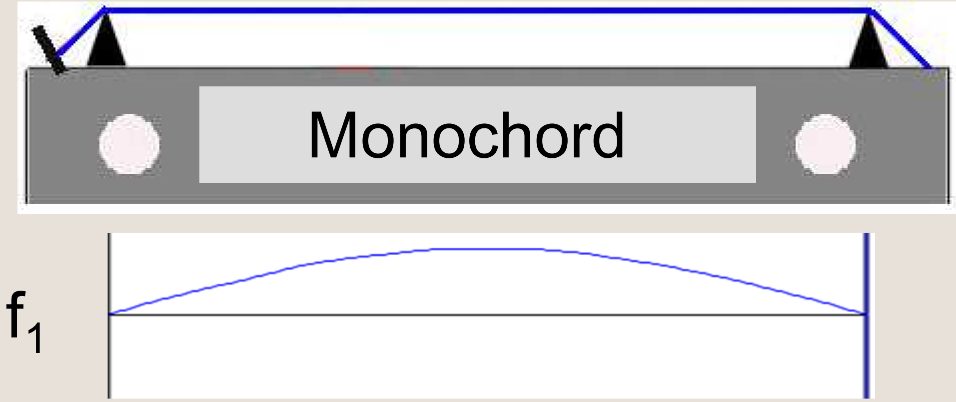


Die Vierzahl war für Pythagoras heilig, weil er glaubte, dass die Götter alles in vollkommener Harmonie geschaffen haben.

Die Frequenz einer schwingenden Saite hängt bei gleicher Spannung von der Saitenlänge ab. Töne klingen zueinander harmonisch, wenn die Saitenlängen in schönen Verhältnissen zueinander stehen.

Schöne Verhältnisse ergeben sich aus der Vierzahl: 1:2 1:3 1:4 2:3 3:4

Pythagoras Tonerzeugung am Monochord



Diese Schwingungsform der Saite heißt Grundschwingung

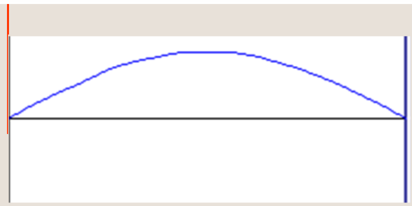
Die Frequenz f der Schwingung hängt von der Saitenlänge L, von der Spannung der Saite und von dem Saitenmaterial ab.

Pythagoras Die Oktave

Gr.: οκτώ ≙ acht Lat.: octavus ≙ der achte

$\frac{1}{2}L$ $\frac{1}{2}L$

$f_8=2\,f_1$



$$L_8=\frac{1}{2}L$$

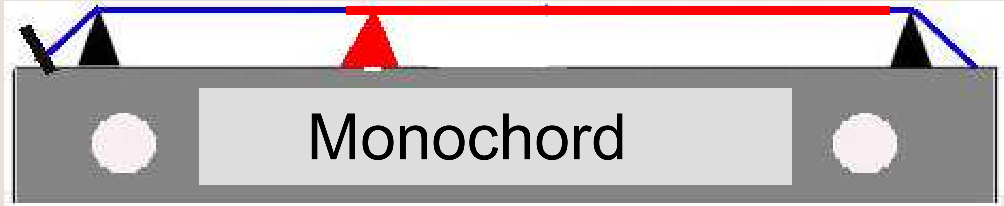
$$\frac{f_8}{f_1}=2:1 \text{ d.h. } f_8=\frac{2}{1}\cdot f_1$$

Dieses Frequenzverhältnis (Intervall) heißt Oktave

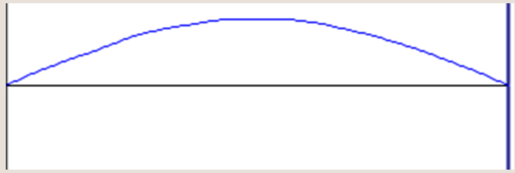
Pythagoras Die Quinte

Gr.: πεντε ≙ fünf Lat.: quintus ≙ der fünfte

$\frac{1}{3}L$ $\frac{2}{3}L$



$$f_5 = \frac{3}{2} \cdot f_1$$



$$L_5 = \frac{2}{3}L$$

$$\frac{f_5}{f_1} = \frac{3}{2}$$

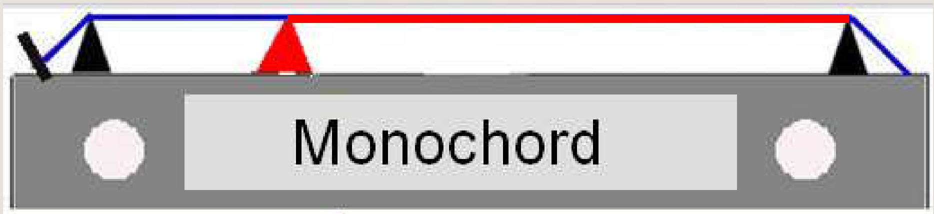
$$f_5 = \frac{3}{2} \cdot f_1$$

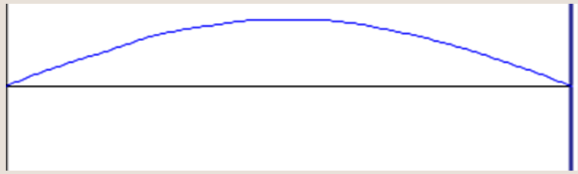
Dieses Frequenzverhältnis (Intervall) heißt Quinte

Pythagoras Die Quarte

Gr.: τέσσερις ≙ vier Lat.: quartus ≙ der vierte

$\frac{1}{4}L$ $\frac{3}{4}L$



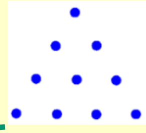


$$L_4 = \frac{3}{4} \cdot f_1$$

$$\frac{f_4}{f_1} = 4:3 \quad \text{d.h. } f_4 = \frac{4}{3} \cdot f_1$$

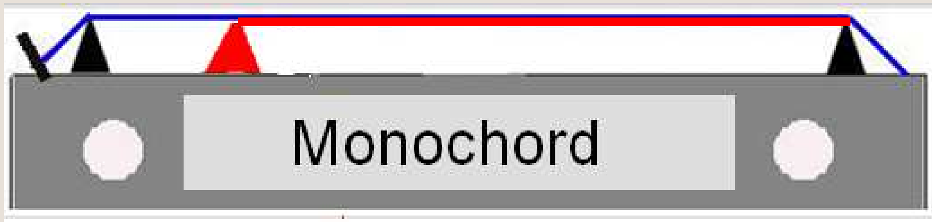
Dieses Frequenzverhältnis (Intervall) heißt Quarte

Pythagoras

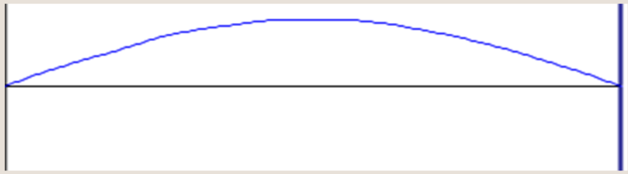


Niemals 5 oh heilige Tetraktys

$\frac{1}{5}L$ $\frac{4}{5}L$

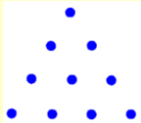


$$f = \frac{5}{4} \cdot f_1$$



Diese Frequenz f kam für Pythagoras nicht in Frage!

Pythagoras



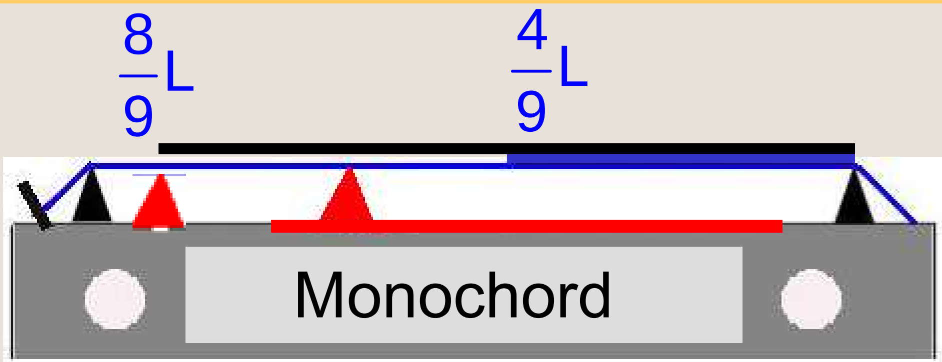
Wie bekomme ich trotzdem sinnvoll weitere Töne?

Die Quinte ist der Schlüssel mit dem die Götter die Harmonie erzeugt haben.

Ich nehme immer 2/3 der Saitenlängen. Falls diese dann kleiner als L/2 sind verdoppele ich einfach die Saitenlänge.

$$\frac{2}{3}\text{von}\,\frac{2}{3}L = \frac{4}{9}L$$

$$\frac{4}{9}L < \frac{1}{2}L$$



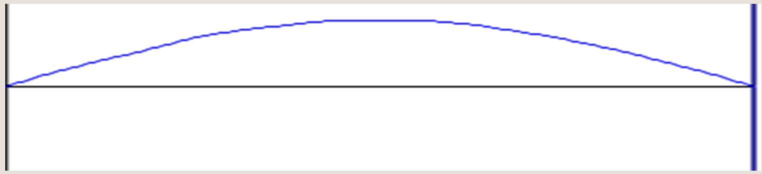
Das ist weniger als bei der Oktave, also:

$$L_2 = 2\cdot\frac{4}{9}L = \frac{8}{9}$$

$$f_2 = \frac{9}{8}\cdot f_1$$

Pythagoras

Gr.: δυο ≙ zwei Lat.: secundus ≙ der zweite



$$L_2 = \frac{8}{9}L \qquad f_2 = \frac{9}{8}\cdot f_1$$

Dieses Frequenzverhältnis (Intervall) heißt Sekunde

Pythagoras

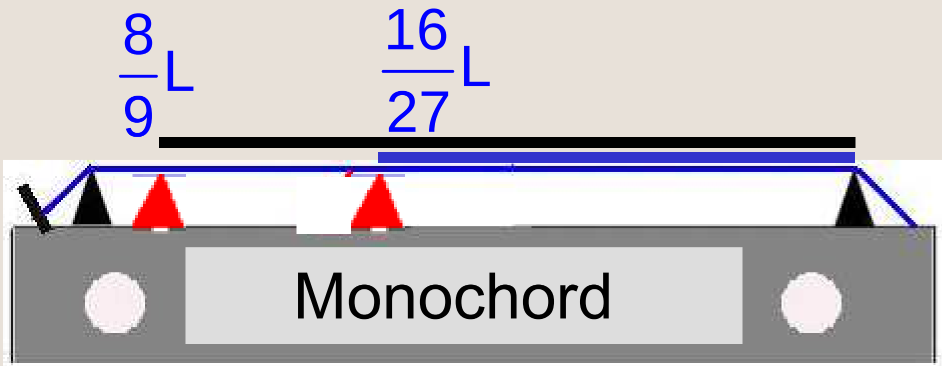
Lat.: sextus $\hat{=}$ der sechste

Die Quinte ist der Schlüssel mit dem die Götter die Harmonie erzeugt haben.

Ich nehme immer 2/3 der Saitenlängen. Falls diese dann kleiner als L/2 sind verdoppele ich einfach die Saitenlänge.

$$\frac{2}{3} \text{ von } \frac{8}{9}L = \frac{16}{27}L$$

$$\frac{16}{27}L > \frac{1}{2}L$$



$$L_6 = \frac{16}{27}L \qquad f_6 = \frac{27}{16} \cdot f_1$$

Dieses Frequenzverhältnis (Intervall) heißt Sexte

Pythagoras

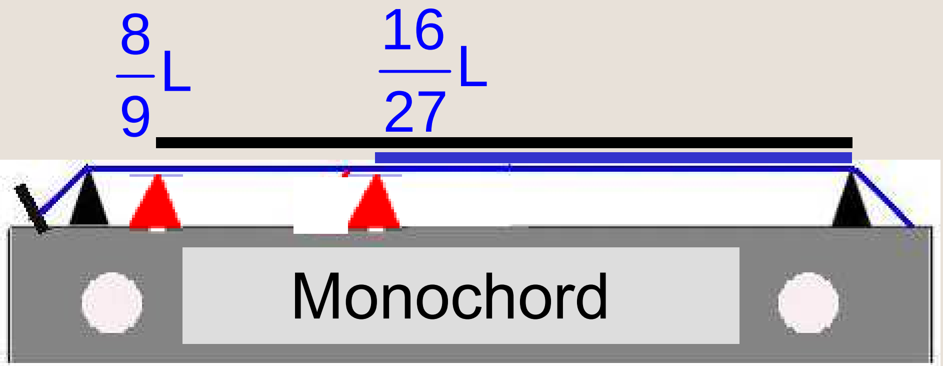
Lat.: tertius $\triangleq$ der dritte

Die Quinte ist der Schlüssel mit dem die Götter die Harmonie erzeugt haben.

Ich nehme immer 2/3 der Saitenlängen. Falls diese dann kleiner als L/2 sind verdoppele ich einfach die Saitenlänge.

$$\frac{2}{3}\text{von}\frac{16}{27}L = \frac{32}{81}L$$

$$\frac{32}{81}L < \frac{1}{2}L$$



$$L_3 = \frac{64}{81} \cdot L \qquad f_3 = \frac{81}{64} \cdot f_1$$

Dieses Frequenzverhältnis (Intervall) heißt Terz

Pythagoras

Lat.: septimus ≙ der siebte

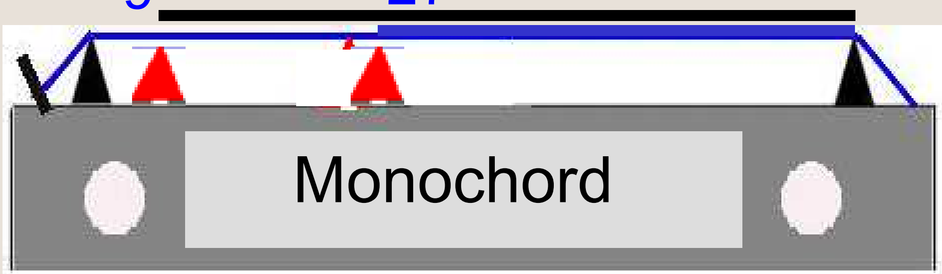
Die Quinte ist der Schlüssel mit dem die Götter die Harmonie erzeugt haben.

Ich nehme immer 2/3 der Saitenlängen. Falls diese dann kleiner als L/2 sind verdoppele ich einfach die Saitenlänge.

$$\frac{2}{3}\text{von}\frac{64}{81}L = \frac{128}{243}L$$

$$\frac{128}{243}L > \frac{1}{2}L$$

$\frac{8}{9}L$ $\frac{16}{27}L$

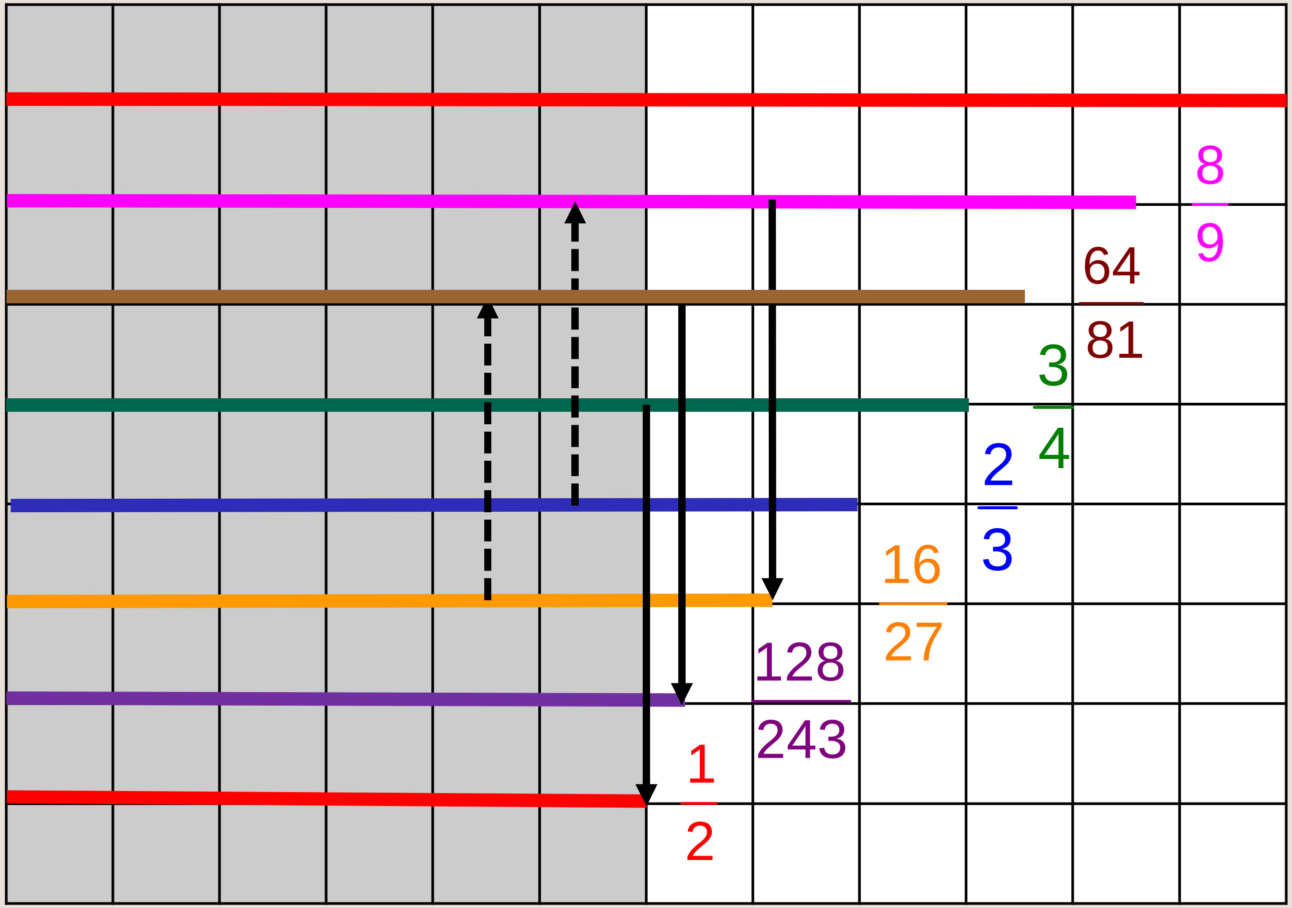


$$L_7 = \frac{128}{253} \cdot L \qquad f_7 = \frac{243}{128} \cdot f_1$$

Dieses Frequenzverhältnis (Intervall) heißt Septe

Pythagoras und die Saitenlängen für seine Tonleiter

Der Schlüssel ist für ihn die Quinte d.h. wiederholte 2/3-Verkürzung bei anschließender Verdopplung, falls x/y< ½ ist.



1

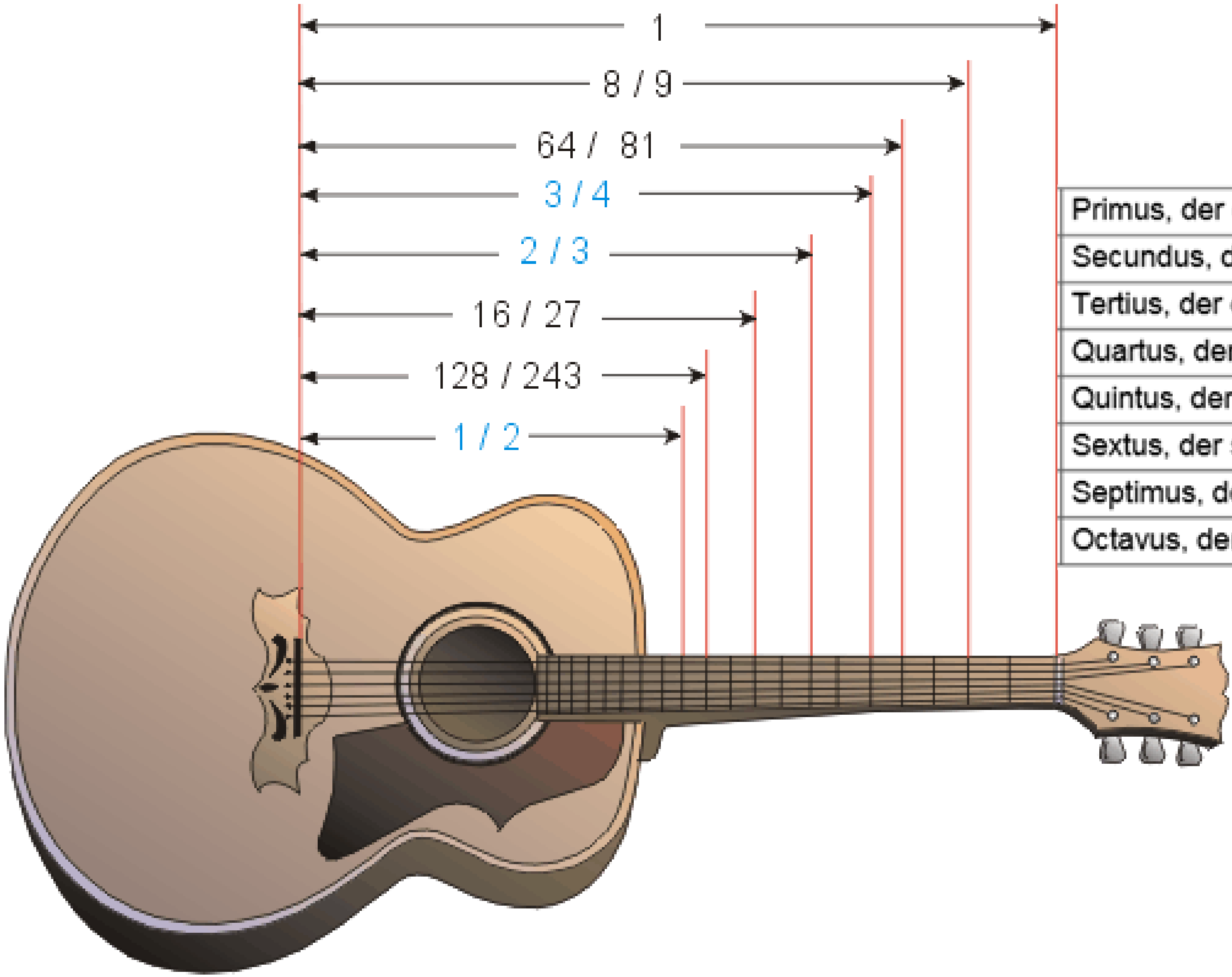
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{8}{9}$$

$$\frac{16}{27}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{64}{81}$$

$$\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$$

$$\frac{64}{81}\cdot\frac{2}{3}=\frac{128}{243}$$

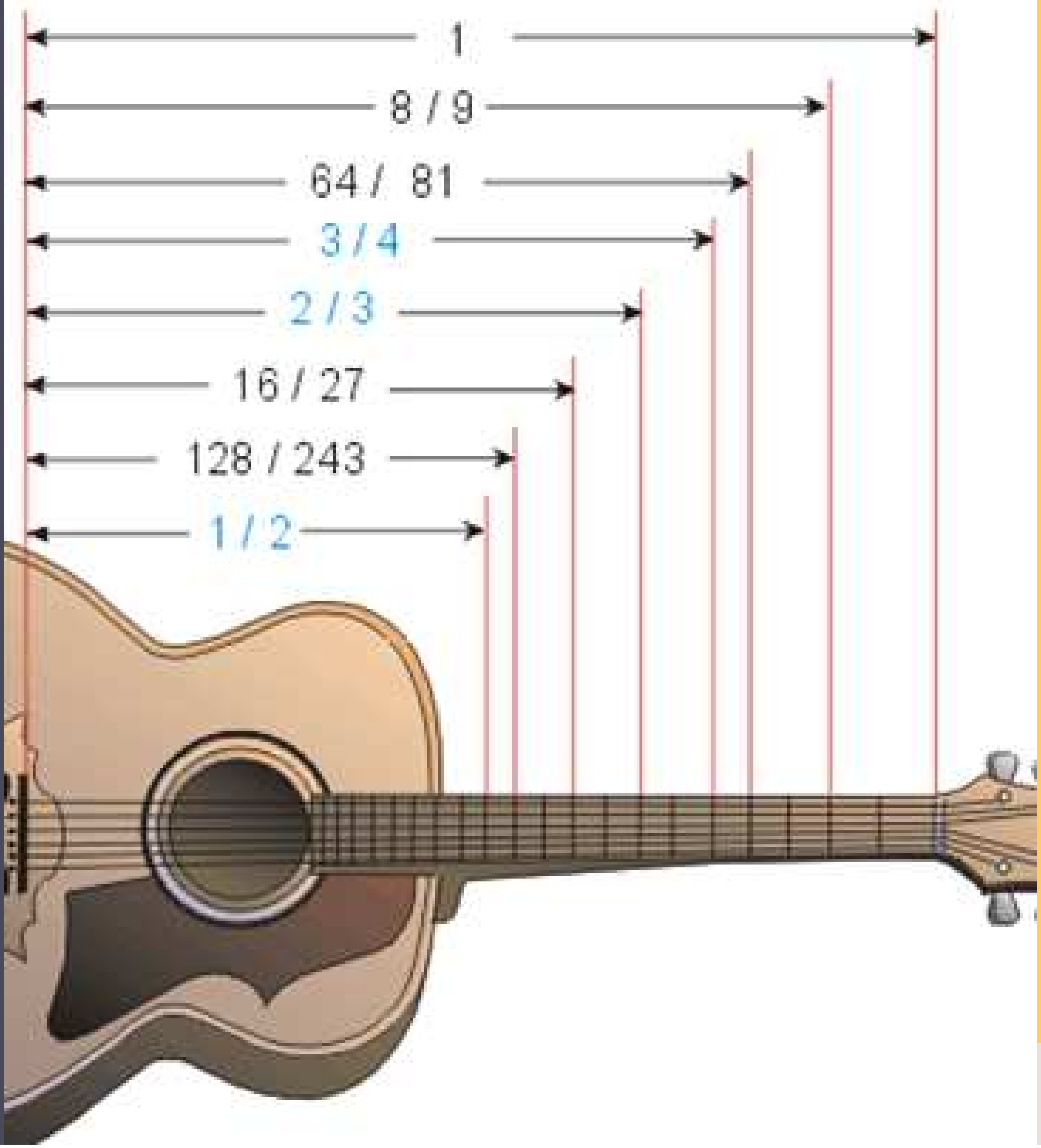
Pythagoras Der Aufbau der Tonleiter



$$f \sim \frac{1}{L}$$

Primus, der erste Ton
Secundus, der zweite Ton
Tertius, der dritte Ton
Quartus, der vierte Ton
Quintus, der fünfte Ton
Sextus, der sechste Ton
Septimus, der siebte Ton
Octavus, der achte Ton

Pythagoras Der Aufbau der Tonleiter Grundton c‘



$$f_1 = 261\text{Hz} \triangleq c'$$

$$f_2 = \frac{9}{8}\cdot 261\text{Hz} = 292{,}5\text{Hz} \triangleq d'$$

$$f_3 = \frac{81}{64}\cdot 261\text{Hz} = 329\text{Hz} \triangleq e'$$

$$f_4 = \frac{4}{3}\cdot 261\text{Hz} = 347\text{Hz} \triangleq f'$$

$$f_5 = \frac{3}{2}\cdot 261\text{Hz} = 390\text{Hz} \triangleq g'$$

$$f_6 = \frac{27}{16}\cdot 261\text{Hz} = 440\text{Hz} \triangleq a'$$

$$f_7 = \frac{243}{128}\cdot 261\text{Hz} = 493{,}6\text{Hz} \triangleq h'$$

$$f_8 = \frac{2}{1}\cdot 261\text{Hz} = 522\text{Hz} \triangleq c''$$

Die Tonleiter des Pythagoras mit a‘=440Hz